Zur Theorie der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der Oberflächen 2. Ordnung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Wilhelm Bath
aus Waren.

AACAD. LUND BAT. BIBL.

Rostock 1904.
Universitäts-Buchdruckerei von Adlers Erben, G. m. b. H.

Referent: Herr Professor Dr. Staude.

Seinen lieben Eltern

in dankbarer Verehrung

gewidmet vom Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549203_0022

Inhaltsangabe.

Einleitung.

I. Teil.

I. Kapitel: Die synthetischen Arbeiten über gleichseitig-hyperbolische Schnitte von Flächen 2. O.
§ 1. Vogt.
§ 2. Schröter.
§ 3. Rupp.
Anhang: Schober, Rulf.

II. Kapitel: Die analytisch-geometrischen Arbeiten über gleichseitig-hyperbolische Schnitte von Flächen 2. O.
§ 4. Plücker.
§ 5. Schlömilch.
§ 6. Hoppe.
§ 7. Krewer.
Anhang: Gillet.

III. Kapitel: Elementargeometrische Bearbeitung des Problems.
§ 8. Weyer.

II. Teil.

IV. Kapitel: § 9. Über Ebenenkoordinaten.

V. Kapitel: § 10. Ableitung der allgemeinen Bedingung für gleichseitig-hyperbolische Schnitte einer Fläche 2. O.
§ 11. Geometrische Deutung der Gleichung 13).
§ 12. Allgemeine Diskussion der Gleichungen 16). Fesstellung derjenigen Flächen 2. O., welche von einer Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten werden können.

VI. Kapitel: § 13. Anwendung der Bedingungen 13) und 14) auf die Normalformen der Flächen 2. O.
§ 14. Die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der beiden Hyperboloide und des Kegels 2. Grades.

§ 15. Die drei Ausnahmefälle:
$a = c > b$, $a > c = b$, $a = b = c$.

§ 16. Die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte des hyperbolischen Paraboloides und hyperbolischen Zylinders und die rechtwinkligen Schnitte des Ebenenpaares.

VII. Kapitel: § 17. Die gleichseitigen Hyperboloide und der gleichseitige Kegel 2. Grades.

§ 18. Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid, der gleichseitige hyperbolische Zylinder und das Paar aufeinander senkrecht stehender Ebenen.

Bekanntlich nehmen die gleichseitigen Hyperbeln unter den Hyperbeln überhaupt eine ähnlich ausgezeichnete Stellung ein wie die Kreise unter den Ellipsen. Ebenso wie diese gehen sie aus den entsprechenden allgemeineren Kegelschnitten als Spezialfälle hervor, sobald die beiden Hauptachsen derselben einander gleich werden, wenn man bei der Hyperbel vom Faktor $\sqrt{-1}$ der imaginären Achse absieht. Daher sind ebenso wie alle Kreise auch alle gleichseitigen Hyperbeln untereinander ähnliche Figuren. Auch in den Gleichungen gibt sich diese Analogie zu erkennen, denn eine Gleichung 2. Grades in ebenen rechtwinkligen Punktkoordinaten stellt stets einen Kreis dar, wenn die Koeffizienten der beiden rein quadratischen Glieder einander gleich sind, dagegen immer dann und nur dann eine gleichseitige Hyperbel, wenn die genannten Koeffizienten gleichen absoluten Wert, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Es liegt daher nahe, bei der Untersuchung der ebenen Schnitte von Oberflächen 2. Ordnung nicht nur den Kreisschnitten, sondern auch den gleichseitig-hyberbolischen Schnitten eine besondere Betrachtung zu widmen. Die meisten Lehrbücher der analytischen Geometrie lassen jedoch eine nähere Behandlung der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte vermissen, während sie der Untersuchung der Kreisschnitte besondere Abschnitte einräumen. Auch in der übrigen mathematischen Literatur sind die gleichseitig-hyperbolischen

Schnitte weniger häufig behandelt. Zwar hat sich in der letzten Hälfte des verflossenen Jahrhunderts eine Reihe von Mathematikern mit dem Problem beschäftigt, von denen einige (Schlömilch, Rupp, Weyer) auch auf die Vernachlässigung desselben gegenüber dem Problem der Kreisschnitte hinweisen; aber von einer Theorie der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte, wie es eine Theorie der Kreisschnitte gibt, kann bisher kaum die Rede sein; denn mit einer Ausnahme beschränken alle Autoren auf diesem Gebiete ihre Untersuchungen auf Teilfragen des Problems und behandeln nicht einmal diese erschöpfend. Ausserdem sind diese Untersuchungen fast alle von einander unabhängig und bedienen sich völlig verschiedener Methoden zur Lösung der gestellten Frage.

Die angeführten Gründe lassen daher eine Zusammenstellung und kritische Sichtung des vorliegenden Materials als Unterbau für eine Theorie der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte in hohem Grade wünschenswert erscheinen, eine Aufgabe, der der erste Teil dieser Abhandlung gewidmet ist. Der zweite Teil derselben sucht im Anschluss an eine Bemerkung von Hesse den wichtigsten Teil der bereits bekannten Sätze, nämlich diejenigen über die Lage der sogen. hyperzyklischen Ebenen[1]) in moderner Bezeichnungsweise zusammenhängend neu zu begründen. Gleichzeitig wird die Untersuchung dieses Teiles der Aufgabe durch die Betrachtung aller möglichen unter speziellen Voraussetzungen auftretenden Modifikationen der allgemeinen Sätze vervollständigt.

[1]) Unter den „hyperzyklischen" Ebenen einer Oberfläche 2. O. versteht man diejenigen Ebenen, welche die gegebene Oberfläche in gleichseitigen Hyperbeln, bezw. Paaren aufeinander senkrecht stehender Erzeugenden schneiden.

Einleitung.

Das behandelte Problem lässt sich in folgende vier Teilfragen zergliedern:

I.

Wann schneidet eine Ebene eine gegebene Oberfläche 2. Ordnung in einer gleichseitigen Hyperbel?

d. h. bei analytisch-geometrischer Behandlung:

Welchen Bedingungen müssen die Koeffizienten in der Gleichung der Ebene genügen, damit der Schnitt mit der gegebenen Fläche ein gleichseitig-hyperbolischer sei?

II.

Wie liegen die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte zu der gegebenen Fläche?

Da es zu jedem gleichseitigen Hyperbelschnitt, wie im folgenden gezeigt wird, ein System paralleler hypercyklischer Ebenen gibt, so ist die Stellung aller derartigen Ebenen bekannt, wenn man sie von allen denjenigen kennt, welche durch denselben beliebigen Raumpunkt gehen. Danach lässt sich die eben aufgeworfene Frage auch so aussprechen:

Welches ist der geometrische Ort der durch denselben Punkt im Raume gehenden hyperzyklischen Ebenen?

III.

Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der auf einer gegebenen Fläche 2. Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln?

IV.

Bei den Linienflächen 2. O., d. h. dem einschaligen Hyperboloid und hyperbolischen Parabaloid, muss es in jedem System paralleler hyperzyklischer Ebenen eine geben, für die die gleichseitige Schnitthyperbel in zwei aufeinander senkrecht stehende Erzeugende ausartet. Ihr Mittelpunkt ist der Schnittpunkt dieser beiden Erzeugenden.

Es entsteht demnach als spezieller Fall von III die weitere Frage:

Welches ist der geometrische Ort der Schnittpunkte von je zwei aufeinander senkrecht stehenden Erzeugenden einer Linienfläche 2. Ordnung?

I–IV.

So weit dem Verfasser bekannt, ist von allen Mathematikern, die bisher über das Problem der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte gearbeitet haben, Rupp der einzige, der alle vier Teilfragen desselben beantwortet; doch begnügt er sich mit der Untersuchung der allgemeinen Formen der in Betracht kommenden Flächen 2. O. Er behandelt die Aufgabe synthetisch. Die 1882 erschienene Arbeit enthält bereits die wichtigsten Sätze, gewissermassen das Gerippe einer Theorie der gleichs.-hyperbol. Schnitte; aber das Verfahren, dessen Rupp sich bedient, ist ein so ungewöhnliches, dass keine der späteren Arbeiten daran anknüpft.

I. II.

Von den übrigen einschlägigen Arbeiten beschäftigt sich die Mehrzahl gleich dem zweiten Abschnitt dieser Abhandlung allein mit den beiden ersten Fragen, die auch in der Tat als die wichtigeren anzusehen sind; und zwar liefern Krewer (1894) und Hoppe (1896) Beiträge ausschliesslich für den ersten Teil, La Chapelle (1750), Rulf (1896) und Weyer (1896)

nur für den zweiten Teil des Problems, während in den synthetischen Arbeiten von Vogt (1879), Schröter (1880) und Schober (1896) und den analytischen von Plücker (1846), Schlömilch (1861) und Gillet (1892) beide Teilfragen Berücksichtigung finden.

Die fünf zuerst genannten Arbeiten stehen alle isoliert da:

(I.)

Krewer, der das allgemeine Problem, eine Oberfl. 2. Grades in einem der Gestalt und Grösse nach gegebenen Kegelschnitte zu schneiden, behandelt und dabei den gleichs.-hyberbol. Schnitten besondere Aufmerksamkeit schenkt, stellt die Bedingungen für die Koeffizienten u, v, w, p der Schnittebene auf, bleibt indes nicht hierbei stehen, sondern gelangt durch Substitutionen, die anscheinend keine geometrische Deutung zulassen, zu Gleichungen, welche Kurven dritter oder höherer Ordnung darstellen, auf deren Diskussion das Problem somit hinausführt. Da diese bei Krewer zu keinem einzigen Satze über die Lage oder sonstige Eigenschaften der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte führt, so ist der Verfasser bei der Besprechung der Krewerschen Untersuchungen auf die Diskussion jener Kurven nicht näher eingegangen.

Hoppe stellt als einziger die Gleichungen der hyperzyklischen Ebenen selbst auf.

(II.)

La Chapelle war wohl der erste, der die Frage nach der Lage von gleichseitigen Hyperbeln im Kegel aufwarf, doch fiel seine Beantwortung derselben nach Weyers Angaben ganz unvollständig aus.

Nicht besser erging es Weyer selbst, ser sich die Untersuchung derselben Frage zum Ziele gesetzt hat, und der dabei ebenso wie La Chapelle elementargeometrisch verfährt. Wie die Besprechung seiner Arbeit dartun wird, geht derselbe bei seiner Unter-

suchung von Voraussetzungen aus, die der vollständigen Lösung der Aufgabe von Anfang an den Weg verlegen. Ausserdem hat sich in die Weyersche Ableitung ein direkter Fehler eingeschlichen, der zu einem verkehrten Resultate führt, vergl. S. 90, 91.

Rulf endlich stellt sich dieselbe spezielle Aufgabe, auf deren Lösung Weyers Aufsatz in Wirklichkeit hinauskommt, nämlich die Bestimmung derjenigen gleichseitigen Hyperbeln in einem Kegel zweiten Grades, welche eine Hauptebene des letzteren zur Symmetrieebene haben. Seine Abhandlung, die in der Konstruktion rein geometrisch, in der Ableitung teilweise analytisch-geometrisch ist, ergänzt die Lehrbücher der darstellenden Geometrie, vergl. Jahrb über die Fortschr. d. Math., Bd. XXVII.

(I. II.)

Die weiteren sechs Arbeiten, welche sich auf die erste Hälfte des Problems beziehen, zerfallen nicht nur äusserlich, der Methode nach, sondern auch inhaltlich in zwei Gruppen, die sich aber mit den ersten nicht decken.

Plücker, Vogt und Schröter liefern Beiträge zur Bestimmung der gleichs.-hyperbol. Schnitte der gleichseitigen Flächen 2. O., genauer einiger derselben; Schlömilch, Gillet und Schober dagegen untersuchen allgemein diejenigen Flächen 2. O., welche in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten werden können, mit Rücksicht auf ihre hyperzyklischen Ebenen. Die je 17 Seiten langen Abhandlungen von Gillet und Schober waren dem Verfasser nicht zugänglich. Das Nähere ihres Inhaltes ist, gestützt auf den Bericht im Jahrb. über d. Fortschr. d. Math., bei der folgenden eingehenderen Literaturbesprechung angegeben worden. Die übrigen vier Arbeiten bedeuten schätzenswerte Beiträge zur Lösung unseres Problems, wenngleich

keine von ihnen auch nur das genannte Teilgebiet erschöpfend behandelt. Übrigens müssen wir, um nicht ungerecht zu werden, erwähnen, dass Plücker, Vogt und Schröter nur gelegentlich anderer Untersuchungen die gleichs.-hyperbol. Schnitte zur Sprache bringen, so dass man auf Vollständigkeit bei ihnen von vornherein nicht zu rechnen hat. Von Plücker liegt überhaupt nur eine kurze, aber sehr scharfsinnige Bemerkung vor über diejenigen Flächen

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2\,B''xy + 2\,B'xz + 2\,Byz = 1,$$

welche der Bedingung

$$A + A' + A'' = 0$$

genügen. Schlömilch stellt als erster die Gleichung für den geometrischen Ort aller durch den Mittelpunkt der gegebenen Fläche gehenden hyperzyklischen Ebenen auf. Bei der Diskussion derselben begeht er einen Fehler, den der Verfasser aufgedeckt und richtig gestellt hat.

III.

Die Frage nach dem geometrischen Ort der Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbelschnitte ist bisher nur von Rupp behandelt worden.

IV.

Die vierte unserer Teilfragen endlich, nämlich die nach den Schnittpunkten je zweier aufeinander senkrecht stehender Erzeugenden einer Linienfläche 2. O. fand vor Rupp bereits vier analytische Bearbeitungen, durch Léon Lhuilier, E. Hans, G. Bruno und Plücker, nach ihm nur noch zwei synthetische durch Schröter und Schober. Von den Genannten betrachten Lhuilier und Bruno nur das Paraboloid, Schröter und Schober nur das einschalige Hyperboloid, u. zw. Schröter allein das gleichseitige. Plückers diesbezüglichen Sätze lassen sich schwer aus dem Zu-

sammenhang seiner Untersuchungen lostrennen, ohne dass man gleichzeitig einen grösseren Formelapparat entwickelt, auf den sie sich stützen. Die Arbeiten von Lhuilier, Hans, Bruno und Schober kennt der Verfasser nur aus den Angaben anderer. Teils aus diesem Grunde, teils weil diese vierte Frage für die Theorie von weit geringerer Bedeutung ist als die ersten beiden, glaubte der Verfasser sich auf eine kurze Wiedergabe der von Rupp gegebenen Ableitung der entsprechenden Sätze beschränken zu dürfen, während er über den Inhalt der übrigen Arbeiten nur in einer Anmerkung berichtet.

Diesen kurzen orientierenden Angaben lässt der Verfasser im I. Teile seiner Abhandlung eine ausführliche Darstellung und kritische Besprechung der einschlägigen Literatur folgen, wenigstens soweit die betreffenden Arbeiten ihm selbst vorgelegen haben. Den Zweck derselben sieht er darin, eine möglichst vollständige Übersicht über das bis dahin Geleistete zu verschaffen und eine Vergleichung der verschiedenen Methoden und der mit ihrer Hülfe gewonnenen Resultate sowohl untereinander als auch mit seinen eigenen zu ermöglichen. Zugleich handelte es sich um die Aufzeigung und Berichtigung der bereits erwähnten Irrtümer.

Aus den einleitenden historischen Notizen geht hervor, dass ein historischer Zusammenhang zwischen den einzelnen Bearbeitungen des in Rede stehenden Problems ausser zwischen Vogt und Schröter nicht besteht. Ebensowenig gibt die sachliche Zusammengehörigkeit einen geeigneten Leitfaden für die Anordnung des Stoffes ab. Als solcher diente daher die Methode.

Dabei erschien es zweckmässig, die synthetischen Arbeiten wegen ihrer loseren Beziehung zum II. Teile

der vorliegenden Abhandlung voranzustellen. Ihnen folgen die analytischen. Wenn die Besprechung der elementar-geometrischen Arbeit von Weyer ans Ende gesetzt wurde, so geschah dies hauptsächlich, weil sie eine längere Kritik erforderte, die selbst bereits durch das Vorhergehende gestützt wird.

Einige von den früheren Arbeiten, nämlich die von Vogt, Plücker, Schlömilch und Weyer, gaben Veranlassung zu einer Fortführung ihres Gedankenganges, durch welche die wichtigsten von den neuen Sätzen, zu denen die vom Verfasser im II. Teile gegebene zusammenhängende analytisch-geometrische Entwickelung führt, bereits im I. Teile im unmittelbaren Anschluss an die ältere Literatur gewonnen werden. Eine Abtrennung dieser neuen Untersuchung von der Darstellung derjenigen Arbeiten, deren Fortsetzungen sie bilden, hielt der Verfasser nicht für angängig. Anderseits glaubt er, dass dieselben nicht ohne einiges Interesse sind, da sie in manche Zusammenhänge eine klarere Einsicht gewähren als die Ausführungen des II. Teiles. Diese Erwägungen mögen zur Entschuldigung der äusseren Ungleichmässigkeit dienen, welche durch die Einfügung dieser Untersuchungen in den einzelnen Paragraphen entstanden ist.

I. Teil.

I. Kapitel.

Die synthetischen Arbeiten über gleichseitig-hyperbolische Schnitte von Flächen 2. O.

§ 1.

In einem Aufsatze: „Über ein besonderes Hyperboloid", den er im Jahre 1879 in Borchardts Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 86, S. 297 ff. veröffentlichte, teilt **Heinrich Vogt** u. a. einige Sätze mit, die sich auf die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte eines gleichseitigen Kegels, eines gleichseitigen Hyperboloides und eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides beziehen. Vogts diesbezügliche Ausführungen lassen sich kurz folgendermassen zusammenfassen:

I.

Kommen in einem Kegel 2. Grades drei Strahlen a b c vor, welche untereinander normal sind, so schneidet jede durch einen beliebigen Punkt des Strahles a parallel zur Ebene (bc) gelegte Ebene, d. h. jede auf dem Kegelstrahl a senkrecht stehende Ebene, den Kegel in einer Kurve, die als unendlich ferne Punkte die unendlich fernen Punkte von b und c enthält. Diese liegen in zwei aufeinander senkrechten Richtungen, welche also zugleich die Asymptotenrichtungen der Kurve sind. Daraus folgt, dass die Schnittkurve der

gedachten Ebene mit dem Kegel eine gleichseitige Hyperbel ist. Nun beweist Vogt, dass in jedem Kegel 2. Grades, der drei untereinander normale Kegelstrahlen enthält, unendlich viele solcher Tripel vorkommen. Ein solcher Kegel wird als „gleichseitiger Kegel" bezeichnet; für ihn ergibt sich aus dem Angeführten unmittelbar der Satz:

§ 1, II: „In dem untersuchten Kegel zweiten Grades ist jede Ebene, welche denselben in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet, normal zu einer Erzeugenden des Kegels und umgekehrt."

II.

Unabhängig hiervon beweist dann Vogt in § 2, dass es, wenn unter den Strahlen (= Erzeugenden) eines (einschaligen oder windschiefen) Hyperboloids drei derselben Schar angehörige untereinander normal sind, unendlich viele solche Tripel von Normalstrahlen in dem Hyperboloid gibt, und zwar derart, dass zu jedem Strahl in derselben Schar zwei mit ihm und untereinander normale vorhanden sind. Hieraus folgt für die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte dieses sogenannten „gleichseitigen" Hyperboloids ein dem vorigen analoger Satz:

§ 2, II: „Ist einmal eine Ebene, welche ein Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet, normal zu einer Erzeugenden desselben, so gilt dasselbe für jeden gleichseitigen Hyperbelschnitt."

Ist die Gleichung eines Hyperboloides

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1,$$

so ist, wie Vogt im weiteren Verlauf des § 2 beweist

$$A^2B^2 - B^2C^2 - C^2A^2 = 0$$

die Bedingung dafür, dass das Hyperboloid gleichseitig ist. Vogt bringt sie in folgende drei Formen (§ 2, VI):

$$1)\ AB = C\sqrt{A^2 + B^2},\quad 2)\ \frac{C^2}{A^2} + \frac{C^2}{B^2} = 1,$$

$$3)\ \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2} = 0,$$

und deutet diese:

„Form 1) sagt aus: Die imaginäre Achse des gleichseitigen Hyperboloids ist gleich der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die beiden reellen Achsen sind.

„Form 2) ergibt: Sind φ, ϑ die Winkel, welche die imaginäre Achse gegen die den Achsenschnitten (AC), (BC) angehörigen Asymptoten bildet, so ist

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\vartheta} = 1 \text{ oder } \operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^2\vartheta = \operatorname{tg}^2\varphi \cdot \operatorname{tg}^2\vartheta,$$

welches zugleich die für den gleichseitigen Kegel charakteristische Bedingung ist.

Form 3) entspricht der für die ebene gleichseitige Hyperbel geltenden Relation

$$\frac{1}{A^2} - \frac{1}{C^2} = 0,$$

sie gibt als Achsengleichung des gleichseitigen Hyperboloids

$$\frac{x^2 - z^2}{A^2} + \frac{y^2 - z^2}{B^2} = 1.“$$

III.

Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid endlich wird von Vogt definiert als derjenige Spezialfall des durch die drei Strahlen (= Erzeugenden, und zwar einer Regelschar) abc bestimmten Hyperboloids, für den a auf der kürzesten Entfernung s' von b und c senkrecht steht. Wie beim Hyperboloid haben wir auch hier zwei Scharen von Erzeugenden, die in folgender Beziehung zu einander stehen: Die sämtlichen Erzeugenden derjenigen Schar, der abc angehören, sind normal zu s', während alle Erzeugenden

der anderen Schar zu einer der Schar a b c angehörigen Geraden s normal sind. Der Schnittpunkt dieser beiden ausgezeichneten Erzeugenden $s \times s' = S$ ist der Scheitel des Paraboloids. Nun erkennt man, dass das gleichseitige hyperbolische Paraboloid der für das gleichseitige Hyperboloid aufgestellten Definition entspricht, denn „zu jedem Strahle x ist ein normaler y vorhanden, da ja die der Schar a b c angehörigen Erzeugenden sämtliche zu s' normale Richtungen durchlaufen; wir haben also unendlich viele Tripel von Normalstrahlen x y s', von denen immer zwei einer Schar angehören; der dritte ist der Scheitelstrahl der anderen Schar." Daraus folgt für die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte dieser Fläche:

§ 5: „Eine normal zu x gelegte Ebene schneidet das Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptotenrichtungen y s' sind. Eine normal zu s' gelegte Ebene schneidet das Paraboloid in einer Geraden der Schar a b c und in der der andern Schar angehörigen unendlich fernen Erzeugenden. Dieser Schnitt kann sowohl als Ausartung der gleichseitigen Hyperbel wie des Kreises aufgefasst werden."

Um zu erkennen, was die Vogtschen Untersuchungen für die Beantwortung unserer Frage nach der Lage der gleichseitigen Hyperbeln in gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung leisten, fassen wir unabhängig von Vogt ihr Gesamtergebnis noch einmal kurz zusammen. Es lautet nach einer naheliegenden Vervollständigung:

Ist die gegebene Oberfläche 2. O. ein gleichseitiger Kegel, ein gleichseitiges Hyperboloid oder ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid, so wird dieselbe von jeder zu einer Erzeugenden der Fläche normalen Ebene in einer gleichseitigen

Hyperbel geschnitten; umgekehrt steht jeder gleichseitig-hyperbolische Schnitt auf einer Erzeugenden der Fläche senkrecht.

Eine Ausnahme bilden nur beim gleichseitigen Paraboloid diejenigen beiden Systeme paralleler Ebenen, welche auf den beiden ausgezeichneten Erzeugenden, nämlich den Scheitelstrahlen s und s', senkrecht stehen, indem für sie die gleichseitigen Schnitthyperbeln in eine endliche und eine unendlich ferne Gerade zerfallen. Zu diesen Ebenen gehören insbesondere die beiden durch s bezw. s' hindurchgehenden und auf der Scheitelebene (ss') senkrecht stehenden Ebenen, welche man als Richtebenen des Paraboloides bezeichnet. Auf diese bemerkenswerte Ausnahme werden wir im zweiten Teile dieser Abhandlung bei der analytisch-geometrischen Behandlung der Aufgabe zurückkommen.

Vogt löst also das Problem im Prinzip für diejenigen drei speziellen Linienflächen 2. O., die er wegen ihrer Analogie mit der gleichseitigen Hyperbel als gleichseitige bezeichnet. Doch vermissen wir nähere Angaben über die räumliche Anordnung der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte, besonders über den Ort aller derjenigen, deren Ebenen durch den Mittelpunkt der Fläche gehen. Das fällt umsomehr auf, als Vogt selbst an einer Stelle mit Berufung auf Beyer[1]: „Das räumliche Polarsystem" erwähnt, dass die gleichseitigen Hyperbelschnitte jedes Hyperboloids im Gegensatz zu den Kreisschnitten „im allgemeinen in unendlich vielen Richtungen vorhanden sind, welche,

[1]) Beyer, Das räumliche Polarsystem, Inaug.-Diss., Breslau 1868. Nach Vogts Bemerkung enthält die Schrift Beiträge zur Kenntnis der Lage der gleichseitig-hyperbol. Schnitte. Der Verfasser konnte sie leider nicht erhalten.

in den Mittelpunkt des Hyperboloids übertragen, einen Kegel zweiten Grades umhüllen."

Die entsprechenden Sätze lassen sich aus Vogts Resultaten leicht herleiten:

I. II.

Vogt selbst erwähnt in § 2, VI, dass die Bedingung

$$\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^2\vartheta = \operatorname{tg}^2\varphi \cdot \operatorname{tg}^2\vartheta$$

für das gleichseitige Hyperboloid und den gleichseitigen Kegel dieselbe sei — beim letzteren sind dann φ und ϑ die Winkel zwischen der reellen Achse und den in den Hauptschnitten gelegenen Kegelstrahlen. Sind für beide Flächen φ und ϑ gleich gross, so wird der Kegel zum Asymptotenkegel des Hyperboloids, und jedes Tripel von normalen Erzeugenden des gleichseitigen Hyperboloids ist einem Tripel zu einander normaler Kegelstrahlen seines Asymptotenkegels parallel. Jede Ebene, die den letzteren in einer gleichseitigen Hyperbel bezw. zwei aufeinander senkrechten Kegelstrahlen schneidet, schneidet daher nach § 1, II und § 2, II auch das Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel, ebenso alle parallelen Ebenen. Bedenkt man nun, dass diejenigen Ebenen, welche in der Spitze des Kegels auf seinen Erzeugenden senkrecht stehen, den Reziprokal- oder Polarkegel des gegebenen umhüllen, so folgt aus § 1, II mit Rücksicht auf das eben Gesagte:

1. Alle Ebenen, welche einen gleichseitigen Kegel in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, sind den Tangentialebenen seines Polarkegels parallel und umgekehrt.
2. Alle Ebenen, welche ein gleichseitiges Hyperboloid in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, sind den Tangentialebenen eines Kegels

parallel, der der Polarkegel des Asymptotenkegels des gegebenen Hyperboloides ist, und umgekehrt.

III.

Über das gleichseitige hyperbolische Paraboloid bemerken wir in Anlehnung an Vogts Resultat Folgendes:

Nach Vogt sind die sämtlichen Erzeugenden einer Regelschar normal zu dem Scheitelstrahl der andern, d. h. mit andern Worten, da auf jedem Scheitelstrahl eine der beiden Richtebenen senkrecht steht: Jede Regelschar ist einer der beiden Richtebenen parallel. Jede Ebene, die auf einer Erzeugenden senkrecht steht, steht demnach auch auf einer der beiden Richtebenen senkrecht. Daraus ergibt sich im Hinblick auf § 5:

Alle Ebenen, welche auf einer der beiden Richtebenen des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides senkrecht stehen, schneiden dasselbe in gleichseitigen Hyperbeln.

Der Satz ist umkehrbar, denn zu jedem gleichseitigen Hyperbelschnitt muss es zwei zu ihm parallele aufeinander senkrecht stehende Erzeugende ys', bezw. y's geben, welche seine Asymptotenrichtungen angeben, und deren Ebene auf einer dritten Erzeugenden x, bezw. x' senkrecht steht. Weil nun x, bezw. x', nach dem vorigen einer der beiden Richtebenen parallel sind, so stehen die zu ihnen normalen Ebenen (ys'), bezw. (y's), mithin also auch die Ebene der gleichseitigen Hyperbel, auf einer der beiden Richtebenen senkrecht, also:

Alle Ebenen, welche ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, stehen auf einer der Richtebenen desselben senkrecht.

Da alle Ebenen, die auf einer Richtebene senkrecht stehen, dem Ebenenbüschel parallel sind, welcher durch den in der andern Richtebene gelegenen Scheitelstrahl bestimmt wird, so gelangen wir schliesslich zu folgender Form des Satzes:

3. Alle Ebenen, welche ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, sind den Ebenen der beiden durch die Scheitelstrahlen als Achsen bestimmten Ebenenbüschel parallel und umgekehrt.

   Wie erwähnt machen die Richtebenen selbst Ausnahmen.

Zu den Ebenen des Satzes 3 gehören im besonderen diejenigen, welche der Scheitelebene (ss') parallel sind. Für diese selbst artet die gleichseitige Hyperbel in ihre Asymptoten s und s' aus, wie überhaupt zu jedem System gleichseitig-hyperbolischer Schnitte bei allen drei behandelten Flächen ein Paar zu einander normaler Erzeugenden als Spezialfall gehört.

Im II. Teil der vorliegenden Abhandlung werden alle drei Sätze analytisch-geometrisch begründet.

IV.

Beiläufig sei noch bemerkt, dass mit den letzten beiden Sätzen zugleich folgende zwei Sätze bewiesen sind:

Alle Ebenen, welche zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen (die Richtebenen des Paraboloides) in Paaren aufeinander normaler Geraden schneiden, stehen auf einer von beiden senkrecht und umgekehrt.

4. Alle Ebenen, welche zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen in Paaren aufeinander normaler Geraden schneiden, sind den Ebenen zweier Ebenenbüschel parallel, deren Achsen

zwei in den gegebenen Ebenen auf einem beliebigen Punkte ihrer Schnittlinie senkrecht stehende Gerade sind und umgekehrt.

§ 2.

Vogts Untersuchungen über die drei „gleichseitigen" Linienflächen 2. Ordnung wurden im folgenden Jahre 1880 von **H. Schröter** in seiner „Theorie der Oberflächen 2. Ordnung" [1]), S. 75; 195; 218 wiederaufgenommen. Doch ist Schröters Darstellung, so weit sie sich auf den gleichseitigen Kegel und das gleichseitige Hyperboloid bezieht, der Vogtschen ohne Zweifel vorzuziehen, schon deshalb, weil Schröter in der richtigen Erkenntnis, dass der gleichseitige Kegel als Asymptotenkegel des gleichseitigen Hyperboloides aufgefasst werden kann, den für die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte des letzteren gültigen Satz als Folge des für den Kegel bewiesenen gewinnt. Auch insofern leistet Schröter für die Lösung unseres Problems mehr als Vogt, als er der Untersuchung des gleichseitigen Kegels die Frage nach den auf einem beliebigen Kegel gelegenen gleichseitigen Hyperbeln voraufschickt. Dagegen unterlässt er es, das gleichseitige hyperbolische Paraboloid mit Rücksicht auf seine gleichseitigen Hyperbelschnitte einer näheren Erörterung zu unterziehen, indem er sich damit begnügt, die senkrecht zu seiner Achse geführten ebenen Schnitte als gleichseitige Hyperbeln zu erkennen.

Schröter geht aus von der Frage (S. 75):

I.

Wie muss eine Ebene gestellt sein, um aus einem gegebenen Kegel eine gleichseitige Hyperbel auszuschneiden?

[1]) Der ausführliche Titel des Werkes ist: „Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde". Leipzig 1880.

Ihre Beantwortung gründet sich darauf, dass eine Ebene, welche man parallel zu einem gleichseitig-hyperbolischen Schnitt durch den Scheitel des Kegels legt, diesen in zwei aufeinander senkrecht stehenden Erzeugenden schneidet, welche den Asymptotenrichtungen der gleichseitigen Hyperbel entsprechen, vergl. S. 15. Umgekehrt wird danach die Stellung der Ebene je zweier zu einander normaler Kegelstrahlen zugleich die Stellung eines Systems paralleler Ebenen angeben, die alle den Kegel in gleichseitigen Hyperbeln schneiden. Nun gibt es im allgemeinen unendlich viele solche Paare normaler Kegelstrahlen; denn legt man durch den Scheitel des Kegels eine Ebene ξ normal zu irgend einem Kegelstrahl x, so schneidet sie den Kegel im allgemeinen in zwei Strahlen y und z, deren jeder auf x senkrecht steht, vorausgesetzt, dass der Kegel sich weit genug öffnet, um mit der Ebene ξ überhaupt einen reellen Schnitt zu liefern [1]). „Bei der Veränderung von x umhüllt nun die Normalebene ξ den reziproken Kegel des gegebenen (= Polarkegel) und es wird also darauf ankommen, nachzusehen, ob die Berührungsebenen des reziproken Kegels den gegebenen in reellen Linienpaaren schneiden oder nicht. Das erstere wird nur dann der Fall sein, wenn der innere Raum des reziproken Kegels ganz oder teilweise in den inneren Raum des gegebenen hineinfällt. Ist dies der Fall, so gibt es unendlich viele Stellungen für eine Ebene, die den Kegel in einer gleichseitigen Hyperbel schneiden soll." Die beiden letzten Sätze enthalten zusammen die Antwort auf die gestellte Frage, welche allerdings noch recht unbestimmt ist und daher kaum geeignet, eine deutliche Anschauung von den gegebenen Verhältnissen zu geben.

[1]) Die grösste Kegelöffnung muss mindestens 90° betragen.

II.

Fragen wir nun weiter, wann eine solche in einer gleichseitigen Hyperbel durchschneidende Ebene auf einem Kegelstrahl normal steht, so zeigt sich, dass diese Eigenschaft lediglich einer besonderen Art von Kegeln, die man als „gleichseitige" bezeichnet, zukommt. Ist nämlich ein gleichseitig-hyperbolischer Schnitt des Kegels gegeben, der auf einem Kegelstrahle senkrecht steht, so müssen durch die Spitze des Kegels zwei weitere Strahlen des Kegels gehen, die in einer der gleichseitigen Hyperbel parallelen, also auf dem ersten Kegelstrahl normal stehenden, Ebene gelegen und untereinander ebenfalls normal sind. Mithin enthält der Kegel ein Tripel auf einander normaler Kegelstrahlen. Für einen solchen sog. „gleichseitigen" Kegel gilt nun, wie Schröter beweist, der Satz: „Hat ein Kegel ein Tripel von drei zueinander rechtwinkligen Kegelstrahlen, so hat er deren unendlich viele", vergl Vogt, d. h.

> „Jede Ebene, welche rechtwinklig zu einem Strahle eines gleichseitigen Kegels gelegt wird, schneidet denselben in einer gleichseitigen Hyperbel." Vergl. Vogt, § 1, II.

Als Bedingung zwischen den beiden Kegelöffnungen in den hyperbolischen Hauptebenen, wenn der Kegel ein gleichseitiger sein soll, gibt Schröter die Relation an:

$$\operatorname{ctg}^2\varphi + \operatorname{ctg}^2\vartheta = 1,$$

worin φ und ϑ die halben Kegelöffnungen bedeuten, d. h. die Winkel zwischen der Kegelachse und den Erzeugenden in den bezüglichen Hauptebenen[1]). Diese Bedingung lässt erkennen, dass φ und ϑ zwischen

[1]) Diese Bedingung stimmt überein mit der Form 2) der von Vogt für das gleichseitige Hyperboloid gefundenen, wo φ und ϑ die Winkel zwischen der imaginären Achse und den Asymptoten der Haupt-Achsenschnitte bedeuteten.

45° und 90° liegen müssen, dass also für den gleichseitig-hyperbolischen Kegel die beiden Hauptkegelöffnungen, 2φ und 2ϑ, grösser als 90° sind.

III.

Die Untersuchung des gleichseitigen Hyperboloids S. 195 ff. knüpft Schröter an die Frage:

> Gibt es ein Hyperboloid, welches durch eine zu einer Erzeugenden rechtwinklige Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten wird?

Diese Frage reduziert sich auf die andere:

> Gibt es ein Hyperboloid, bei welchem drei derselben Regelschar angehörige Erzeugende normal untereinander gerichtet sind?

denn durch jeden der beiden unendlich fernen Punkte der gleichseitigen Hyperbel müsste eine Erzeugende derselben Regelschar gehen, der auch die gegebene, auf der Ebene der gleichseitigen Hyperbel senkrechte, Erzeugende angehört; jene beiden unendlich entfernten Punkte aber finden sich ebenfalls in zwei zueinander normalen Richtungen.

Verschiebt man die sämtlichen Erzeugenden einer der beiden Regelscharen parallel mit sich, d. h. unter Erhaltung ihrer Richtung, auf die allein es hier ankommt, in den Mittelpunkt des Hyperboloids, wo sie dann den Asymptotenkegel desselben bilden, so führt die letzte Frage auf die einfachere:

> Gibt es auf einem Kegel 2. O. drei zueinander normale Kegelstrahlen?

Aus der Antwort, die diese Frage bei der Behandlung des gleichseitigen Kegels gefunden hat, folgt für das hier angeschnittene Problem:

> „Ist einmal eine Ebene, welche ein Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet, rechtwinklig zu einer Erzeugenden desselben, so schneidet jede zu einer Erzeugenden normale Ebene das Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel."

Sind 2 b und 2 c die reellen Hauptachsen, während die a-Achse imaginär ist, so besteht die Bedingungsgleichung:

$$\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = 0.$$

Dieselbe entspricht der Form 3) der Bedingungsgleichung bei Vogt.

IV.

Bezüglich der gleichseitigen Hyperbelschnitte des gleichseitig-hyberbolischen Paraboloids endlich findet sich bei Schröter nur die Bemerkung (S. 218), dass jede zu der Hauptachse des Paraboloides normale Ebene dasselbe in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet. Dieser Satz folgt daraus, dass, wenn das Paraboloid ein gleichseitiges ist, seine beiden Scheitelstrahlen l^0 und g^0, welche die Asymptotenrichtungen aller zur Achse senkrechten hyperbolischen Schnitte angeben (S. 216), aufeinander senkrecht stehen. Zwei solche vom Scheitel des Paraboloids nach entgegengesetzten Richtungen hin gleich weit abstehende Ebenen schneiden in zwei konjugierten gleichseitigen Hyberbeln.

Neu gegenüber Vogt ist bei Schröter, wie bereits hervorgehoben, die Erkenntnis und Nutzbarmachung des Zusammenhanges zwischen dem gleichseitigen Kegel und dem gleichseitigen Hyperboloid. Die Darstellung gewinnt dadurch an Einheitlichkeit und trägt durch Ableitung des einen Satzes aus dem andern mehr dem durch den sachlichen Zusammenhang gegebenen Verhältnis Rechnung. Doch ist der Gedanke an und für sich nicht neu, da Plücker schon 34 Jahre früher von noch allgemeinerem und daher höherem Standpunkte aus die Sätze analytisch gewonnen hatte.

Die Bedingungen

$$\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}=0$$

und

$$\operatorname{ctg}^2\varphi+\operatorname{ctg}^2\vartheta=1$$

sind natürlich äquivalent, wenn man den Kegel als Asymptotenkegel des Hyperboloides ansieht, also als Gleichungen der Flächen

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\begin{cases}1\\0\end{cases}$$

wählt. Dann ist nämlich $\operatorname{ctg}\varphi=\frac{a}{c}$, $\operatorname{ctg}\vartheta=\frac{a}{b}$, so dass beide Bedingungsgleichungen durch Einsetzen dieser Werte ineinander übergehen.

Auf die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte des gleichseitigen Paraboloides geht Schröter in seinem Lehrbuch nicht näher ein, während bei Vogt gerade die Ableitung des hierauf bezüglichen Satzes besonders deutlich das Gemeinsame und Charakteristische der drei „gleichseitigen" Flächen ans Licht rückte und, wie wir gesehen, die Grundlage für mehrere neue Sätze abgab (vergl. auch Plücker).

Endlich sei hervorgehoben, dass beide die Untersuchung des gleichseitigen zweischaligen Hyperboloides, d. h. desjenigen zweischaligen Hyperboloides, dessen Asymptotenkegel ein gleichseitiger Kegel ist, unterlassen, was sich aus der von ihnen gewählten Definition des gleichseitigen Hyperboloides erklärt, da das zweischalige Hyperboloid nicht zu den Linienflächen gehört, also keine Erzeugende besitzt.

§ 3.

Die ersten rein geometrischen Untersuchungen über die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte von Flächen 2. Grades im allgemeinen veröffentlichte

1882 **O. Rupp** in einem Aufsatz über die auf Flächen 2. Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln[1]).

Rupps Untersuchungen schlagen einen eigentümlichen, von allen sonst benutzten Methoden völlig verschiedenen Weg ein. Da sie aus diesem Grunde ausser in den Resultaten mit keiner der andern Arbeiten über diesen Gegenstand, im besondern auch nicht mit der analytisch-geometrischen des Verfassers verglichen werden können, so genügt es, wenn hier ihr Ausgangspunkt, ihr Grundgedanke und ihre Resultate wiedergegeben werden, während auf eine Wiedergabe ihrer Durchführung im einzelnen verzichtet werden darf. Nur die von Rupp gegebene Ableitung des Satzes über die gleichs.-hyperbol. Schnitte des hyperbolischen Paraboloides erfordert eine eingehende Darstellung, weil sich in dieselbe ein Versehen eingeschlichen hat, welches im resultierenden Satze einen Widerspruch zu dem auf analytisch-geometrischem Wege von Schlömilch zuerst gefundenen und vom Verfasser neu begründeten Resultate bedingt.

Das Charakteristische des von Rupp eingeschlagenen Verfahrens besteht darin, dass er einen Satz aus der Theorie der Kegelschnitte auf den unendlich fernen Schnitt der zu untersuchenden Flächen 2. Grades anwendet und dann durch einen Rückschluss von den in der unendlich fernen Ebene gelegenen Kegelschnitten, Geraden und Punkten auf die ihnen entsprechenden räumlichen Gebilde, d. h. Flächen, Ebenen und Geraden, seine Sätze über die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte usw. gewinnt.

---

[1]) O. Rupp, Über die auf Flächen zweiten Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln, Sitz.-Berichte d. Wiener Akad., math.-naturwiss. Klasse, Bd. 86, 2 (1882), S. 909 ff.

A.

Sind nämlich in ein und derselben Ebene die beiden Kegelschnitte K_1 und K_2 mit den vier Schnittpunkten a, b, c, d gegeben, und sind die Durchschnitte der Geradenpaare $ab \times cd = m$, $ac \times bd = n$, $ad \times bc = p$, so ist das Dreieck m n p sich selbst konjugiert bezüglich K_1 und K_2, und es gilt der Satz:

„Die Geraden, welche K_1 in zwei Punkten schneiden, die bezüglich K_2 konjugiert sind, oder, was dasselbe ist, die Geraden, welche K_1 und K_2 in vier harmonischen Punkten schneiden, berühren einen Kegelschnitt K_3. Die Tangenten von K_1 und K_2 in den vier Punkten a, b, c und d sind auch Tangenten von K_3, und ebenso ist auch das Dreieck m n p sich selbst konjugiert bezüglich K_3. Der dem Kegelschnitte K_3 in bezug auf K_2 (als Direktrix) polarreziproke Kegelschnitt K_4 geht durch a, b, c und d und besitzt ebenfalls das selbstentsprechende Dreieck m n p."

Dieser Satz bildet die gemeinsame Grundlage der von Rupp auf den folgenden 8 Seiten gegebenen Untersuchungen. Aus ihm gehen alle im folgenden mitgeteilten Resultate hervor.

I.

Zunächst betrachtet Rupp K_1 als den imaginären Kugelkreis im Unendlichen, K_2 als den unendlich fernen Kegelschnitt einer Fläche 2. Grades. Dann repräsentieren diejenigen Geraden, welche den unendlich fernen Kegelschnitt K_2 der Fläche in zwei bezüglich des imaginären Kugelkreises K_1 konjugierten Punkten schneiden, die Stellungen aller derjenigen Ebenen, welche die Fläche 2. Grades in gleichseitigen Hyperbeln schneiden. Nach obigem Satze umhüllen diese Geraden einen Kegelschnitt K_3, für welchen die drei Punkte m, n und p, welche die Richtungen der Hauptachsen der gegebenen Fläche bedeuten, ein

Tripel konjugierter Punkte bilden. Verbindet man nun einen beliebigen Punkt S im Raume mit diesem Kegelschnitt K_3, so erhält man einen Kegel (S, K_3), dessen sämtlichen Tangentialebenen nach dem Vorigen die gegebene Fläche 2. Grades in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, und dessen Hauptachsen und Hauptebenen den Hauptachsen und Hauptebenen dieser Fläche parallel sind. Aus dem oben angeführten Satze lassen sich leicht noch einige weitere Eigenschaften dieses Kegels entnehmen, deren Ableitung jedoch hier übergangen sein mag. Das Gesamtergebnis lautet:

„Die Ebenen, welche durch einen beliebigen Punkt im Raume gehen, und eine gegebene Fläche zweiten Grades in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, umhüllen einen Kegel zweiten Grades, dessen Achsen und Achsenebenen zu jenen der gegebenen Fläche parallel sind, und dessen Fokallinien auf den Kreisebenen der gegebenen Fläche senkrecht stehen.

Ist die gegebene Fläche zweiten Grades selbst ein Kegel, so folgt aus dem vorstehenden Satze unmittelbar der folgende:

„Die Ebenen, welche einen Kegel zweiten Grades in Paaren aufeinander senkrecht stehender Erzeugenden schneiden, umhüllen einen zweiten, mit dem vorigen konzentrischen und koaxialen Kegel zweiten Grades, dessen Fokalgeraden auf den Kreisebenen des ersteren senkrecht stehen.“

Dazu bemerkt Rupp ohne weiteren Beweis, dass, falls der gegebene Kegel gleichseitig ist, der abgeleitete Kegel zugleich sein Polarkegel ist (vergl. S. 20, 21).

II.

Das letzte Drittel des angeführten Hilfssatzes dient Rupp dazu, den Ort der Mittelpunkte der auf der gegebenen Fläche 2. Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln zu bestimmen. Sein Gedanken-

gang ist folgender: Die gesuchten Mittelpunkte liegen auf den konjugierten Durchmessern zu den Ebenen der gleichs.-hyperbol. Schnitte in bezug auf die gegebene Fläche. Nun ist nach dem Hilfssatze der Kegelschnitt K_4 der Ort der Pole aller Tangenten von K_3 in bezug auf K_2, d. h. wenn wir K_4 vom Mittelpunkt M der gegebenen Fläche aus projizieren durch einen Kegel (M, K_4), so sind die Erzeugenden dieses Kegels gerade die gesuchten konjugierten Durchmesser zu den Ebenen der gleichs.-hyperbol. Schnitte der gegebenen Fläche, deren Stellungen eben durch die Tangenten des Kegelschnittes K_3, wie wir gesehen, repräsentiert werden. Weiter folgt daraus, dass der Kegelschnitt K_4 in der unendlich fernen Ebene durch a, b, c und d geht, deren Verbindungsgeraden die Stellungen der Kreisschnittebenen der gegebenen Fläche F^2 bedeuten, dass der Kegel (M, K_4) mit der Fläche F^2 die Kreisebenen gemein hat; und daraus, dass K_4 auch das sich selbst entsprechende Dreieck mnp besitzt, ergibt sich, dass die Hauptachsen der Fläche F^2 zugleich die Hauptachsen des Kegels (M, K_4) sind. Wir gelangen also zu dem Satze:

„Der geometrische Ort des Mittelpunktes aller auf einer Fläche zweiten Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln ist ein mit dieser Fläche konzentrischer, koaxialer und koncyklischer Kegel zweiten Grades."

Besonders hervorzuheben ist, dass die Kegel (S, K_3) und (M, K_4) nur dann reell sein *können*, wenn die Fläche F^2 überhaupt hyperbolische Schnitte zulässt, wozu erforderlich ist, dass sie von der unendlich fernen Ebene in einem *reellen* Kegelschnitte K_2 geschnitten wird. Dieser Bedingung genügen der Kegel 2. Grades und die beiden Hyperboloide. Jedoch brauchen auch unter den hyperbolischen Schnitten

dieser Flächen sich nicht notwendig gleichseitig-hyperbolische zu befinden.

III.

Ist die gegebene Fläche F^2 insbesondere ein windschiefes (einschaliges) Hyperboloid, und ist (M, K_4) reell, so ist die Schnittkurve C^1 von F^2 und (M, K_4) der geometrische Ort der sich rechtwinklich schneidenden Erzeugenden des Hyperboloides; denn ein jeder Punkt der Schnittkurve C^1 ist Mittelpunkt einer auf F^2 liegenden gleichseitigen Hyperbel, da er dem Kegel (M, K_4) angehört, zugleich ist er aber auch ein Punkt dieser Hyperbel selbst, da er auf F^2 liegt; das ist aber nur dann möglich, wenn die gleichseitige Hyperbel in ein Paar aufeinander senkrecht stehender Geraden ausartet, deren Schnittpunkt zugleich ihr Mittelpunkt ist. Die genannte Schnittkurve C^4 von F^2 und (M, K_4) ist eine Raumkurve 4. Ordnung, die, wie Rupp beweist, auch als Schnitt des gegebenen Hyperboloides mit der ihm entsprechenden Mongeschen Kugel aufgefasst werden kann, d. h. derjenigen Kugel, welche den geometrischen Ort der Schnittpunkte je dreier aufeinander senkrecht stehender Tangentialebenen des Hyperboloides darstellt. Damit gelangt Rupp zu den weiteren Sätzen:

„Der geometrische Ort der Schnittpunkte aufeinander senkrecht stehender Erzeugenden eines windschiefen Hyperboloides ist jener sphärische Kegelschnitt, welcher sich als Schnitt des Hyperboloides mit der zugehörigen Mongeschen Kugel ergibt[1]).

[1]) Nach Rupp berechnet Léon Lhuilier, Nouvelles Annales de Mathématiques, vol. XXII, p. 149, die Gleichung jener Kurve, die von den Schnittpunkten aufeinander senkrecht stehender Erzeugenden einer windschiefen Fläche 2. Grades gebildet wird, für das Parabol., und E. Hans, ibid. vol. XXII, p. 152, für das Hyperbol. und Parabol., während G. Bruno, Atti

Der Kegel zweiten Grades, welcher diesen sphärischen Kegelschnitt aus dem Mittelpunkte des Hyperboloides projiziert, ist der Ort der Mittelpunkte aller auf dem Hyperboloide liegenden gleichseitigen Hyperbeln."

B.

Zum Zweck der Untersuchung des hyperbolischen Paraboloides und des Ebenenpaares, die beide die unendlich ferne Ebene in zwei Geraden schneiden, ist es nötig, den zugrunde gelegten Hilfssatz unter der Voraussetzung zu modifizieren, dass der Kegelschnitt K_2 in zwei Geraden degeneriere.

Diese Geraden seien g_1 und g_2, ihr Schnittpunkt $g_1 \times g_2 = z$, ihre Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt K_1 beziehungsweise a_1, b_1 und a_2, b_2. Ferner schneide die Polare Z von z in bezug auf den Kegelschnitt K_1 die Geraden g_1 und g_2 in n_1 und n_2. Sei endlich f_1

---

della Academia Reale delle scienze di Torino, vol. VI, p. 153, durch Rechnung nachweist, dass die genannte Kurve im Falle eines Parabol. eben sei.

Über denselben Gegenstand finden sich bei Plücker, System, S. 204 (1846), die Sätze: „Der geometr. Ort für die Scheitel der einem gegeb. einschal. Hyperbol. aufgeschriebenen rechten Winkel ist die Durchschnittskurve dieser Fläche und einer Kugel, deren Radius-Quadrat der Summe der drei Halbachsenquadrate $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma'^2)$ gleich ist." [$\gamma' = \gamma\sqrt{-1}$ imagin. Halbachse]. „In dem Falle der beiden Paraboloide artet die Kugeloberfläche in eine Ebene aus, welche, wenn das Paraboloid ein hyperbolisches ist, dieses in einer Hyperbel schneidet. Diese Hyperbel ist der geometr. Ort für die Scheitel der der Fläche aufgeschriebenen rechten Winkel. In dem Falle des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides fällt die fragliche Ebene mit der Tangentialebene im Scheitel desselben zusammen."

Schröter, a. a. O. S. 199, 200, leitet den Satz für das gleichseit. Hyperbol. ab.

K. Schober, a. a. O., erkennt, dass der fragliche Ort beim einschal. dreiachsig. Hyperbol. eine Raumkurve 4. Ordn. sei. (Jahrb. f. Fortschr. d. M.)

der Schnittpunkt der Tangenten t^1_a und t^1_b von K_1 in den Punkten a_1 und b_1 und entsprechend f_2 der Schittpunkt der Tangenten t^2_a und t^2_b von K^1 in a_2 und b_2, so ist f_1 gleichzeitig der Pol von $a_1 b_1 = g_1$ in bezug auf K_1, f_2 der von $a_2 b_2 = g_2$, und f_1 und f_2 liegen auf Z.

In diesem Falle nimmt unser Hilfssatz nachstehende Form an:

„Die Geraden, welche g_1 und g_2 in Punkten treffen, welche bezüglich K_1 konjugiert sind, umhüllen einen Kegelschnitt K_3, welcher von t^1_a, t^1_b, t^2_a, t^2_b, g_1 und g_2 berührt wird, und zwar von den beiden letzten in n_1 resp. n_2. Dem Punkte z entspricht dieselbe Polare Z in bezug auf K_1 und K_3, und die Punkte f_1 und f_2 besitzen dieselbe polare Strahleninvolution bezüglich K_1 und K_3“ [1]).

I.

Nun sieht Rupp wieder K_1 als den imaginären Kugelkreis, g_1 und g_2 als die in der unendlich fernen Ebene liegenden Erzeugenden des hyperbol. Paraboloides F^2 an, welche gleichzeitig die Stellungen der Richtebenen repräsentieren, während ihr Schnittpunkt z die Richtung der Achse des Paraboloides, und die Gerade Z die Stellung der zu dieser Achse senkrechten Ebenen angibt. Die übrigen Punkte, Geraden usw. haben folgende Bedeutung: n_1 und n_2 als Schnittpunkte von g_1 und g_2 mit Z bedeuten die Asymptotenrichtungen jener Hyperbeln, in denen das Paraboloid (g_1, g_2) von den zur Achse senkrechten Ebenen (Z) geschnitten wird. f_1 und f_2 stellen als Pole von g_1 und g_2 in bezug auf den imaginären Kugelkreis K_1 die Richtungen aller zu den Richtebenen des Paraboloides senkrechten Geraden vor. Endlich geben die Tangenten des Kegelschnittes K_3 wieder die Stellungen der Ebenen an, welche die ge-

gebene Fläche, in diesem Falle also das hyperbol. Paraboloid, in gleichseitigen Hyperbeln schneiden.

Den folgenden Passus, der das erwähnte Versehen enthält, geben wir wörtlich wieder:

„Betrachten wir nun einen beliebigen Punkt S im endlichen Raum als Scheitel eines Kegels (S, K_2), welcher den Kegelschnitt K_3 enthält, so wird dem angeführten Hilfssatze zufolge dieser Kegel folgende Eigenschaften besitzen.

Alle Tangentialebenen desselben werden das Paraboloid T^2 in gleichseitigen Hyperbeln schneiden. Die Achse Sz desselben wird parallel zur Achse des Paraboloides sein. Die zu dieser Achse senkrechten Ebenen schneiden den Kegel (S, K_2) in Hyperbeln, deren Asymptoten dieselben Richtungen n_1 und n_2 haben, wie die Asymptoten jener Hyperbeln, in welchen die nämlichen Ebenen das Paraboloid schneiden, oder mit anderen Worten, die zur Achse Sz des Kegels (S, K_2) senkrechten Ebenen schneiden diesen Kegel und das Paraboloid in ähnlichen und ähnlich gelegenen Hyperbeln. Den Geraden Sf_1 und Sf_2 entsprechen dieselben polaren Ebeneninvolutionen bezüglich K_1 und K_3. Diese Ebeneninvolutionen sind rechtwinklig, da K_1 der imaginäre Kugelkreis ist, und ihre Achsen Sf_1 und Sf_2 sind daher die „Fokalgeraden" des Kegels (S, K_3).

Berücksichtigt man endlich noch, dass die Stellungen g_1 und g_2 der zu den Fokalgeraden senkrechten Ebenen gleichzeitig Tangenten des Kegelschnittes K_3 sind, so folgt unmittelbar, dass der Kegel (S, K_3) von den Ebenen, welche zu seinen Fokalgeraden senkrecht stehen, in Parabeln geschnitten wird, dass derselbe daher ein „parabolischer Kegel" sei [1]).

[1]) Plücker nennt einen Kegel zweiten Grades elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch, je nachdem der zu einer Fokalgeraden senkrechte Schnitt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist.

Dies alles zusammengefasst, liefert den Satz:

„Die Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt im Raume gehen und ein hyperbolisches Paraboloid in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, umhüllen einen parabolischen Kegel, dessen Achse parallel zur Achse des Paraboloides, und dessen Fokalgeraden auf den Richtebenen des Paraboloides senkrecht stehen. Die zur vorgenannten Achse senkrechten Ebenen schneiden den Kegel und das Paraboloid in ähnlichen und ähnlich gelegenen Hyperbeln."

Für das Ebenenpaar insbesondere ergibt sich der Satz:

„Die Ebenen durch einen festen Punkt im Raume, welche zwei Ebenen in Geraden schneiden, die aufeinander senkrecht stehen, umhüllen einen parabolischen Kegel, dessen Hauptebenen parallel zu den Winkelhalbierebenen und zur Ebene des Neigungswinkels der beiden gegebenen Ebenen sind, und dessen Fokalgeraden zu den beiden gegebenen Ebenen senkrecht stehen."

So weit Rupp. Die genannte Ungenauigkeit liegt im ersten der beiden angeführten Sätze in der Behauptung, dass „die Achse" des Ortskegels der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte des hyperbolischen Paraboloides parallel zur Achse des Paraboloides selbst sei. Nicht „die" Achse, d. h. nach dem allgemein üblichen Sprachgebrauch die reelle Hauptachse des Kegels, sondern eine seiner (imaginären) Achsen hat diese Stellung, während die reelle Hauptachse des Ortskegels in jedem Falle, d. h. für alle Grössenverhältnisse der Achsen des Paraboloides, auf der Hauptachse desselben senkrecht steht. Das letztere kann aus Rupps eigenen Ausführungen

gefolgert werden. Nach obigem Satze nämlich sollen die Fokalgeraden des Ortskegels auf den Richtebenen des Paraboloides senkrecht stehen, also auch die Ebene der Fokalgeraden auf dem Durchschnitt der Richtebenen, d. h. auf der Hauptachse des Paraboloides. In der Ebene der Fokalgeraden eines Kegels liegt aber allemal seine reelle Hauptachse, dieselbe muss daher in unserem Falle unter allen Umständen auf der Paraboloid - Achse senkrecht stehen. Wie die späteren Untersuchungen zeigen werden, fällt sie entweder mit der einen oder mit der andern Nebenachse des Paraboloides zusammen. Die Gerade Sz kann schon aus dem Grunde nicht „die Achse" des Ortskegels (S, K_3) sein, weil sie ausserhalb desselben liegt, was aus folgenden Betrachtungen hervorgeht: z ist der Schnittpunkt von g_1 und g_2; diese beiden Geraden gehören nach dem Hilfssatze zu den Tangenten des Kegelschnitts K_3, daher bedeutet die Gerade Sz den Durchschnitt der beiden Tangentialebenen Sg_1 und Sg_2 des Ortskegels (S, K_3) und liegt als solcher ausserhalb des Kegels.

Der Irrtum Rupps steht vielleicht damit in Zusammenhang, dass Rupp im Angeführten den Ortskegel dreimal fälschlich mit (S, K_2) statt mit (S, K_3) bezeichnet.

II.

Fragen wir auch hier nach dem Ort der Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbelschnitte, so lässt uns das früher benutzte Verfahren im Stich, da der Kegelschnitt K_4 sich auf den Punkt z reduziert, woraus nur folgt, dass die Durchmesser des Paraboloides, welche den Ebenen der gleichseit.-hyperbol. Schnitte konjugiert sind, dieselbe Richtung z besitzen, eine Eigenschaft, die allen Durchmessern des Paraboloides zukommt. Zur Lösung des Problems dient im Fall

des Paraboloides der Satz, dass die zu seiner Achse senkrechten Ebenen das Paraboloid und den Ortskegel seiner gleichseit.-hyperbol. Schnitte in ähnlich gelegenen Hyperbeln schneiden. Verschiebt man nämlich den Kegel (S, K_3) parallel mit sich derart, dass sein Scheitel in einen Punkt S^1 der Paraboloid-Achse fällt, so wird derselbe das Paraboloid in einer solchen Hyperbel C^2 schneiden, deren Ebene auf der Achse des Paraboloides senkrecht steht, und der Kegel (S^1, C^2) ist aufzufassen als der dem Paraboloid vom Punkte S^1 aus umschriebene Kegel. Jede Tangentialebene dieses Kegels schneidet das Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel, die jedoch, da die Ebene gleichzeitig das Paraboloid in einem Punkte von C^2 berührt, in zwei durch den Berührungspunkt gehende, aufeinander senkrecht stehende Erzeugende des Paraboloides ausartet. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller auf dem hyperbol. Paraboloide liegenden gleichseitigen Hyperbeln wird, wie hiernach leicht einzusehen, von denjenigen Durchmessern des Paraboloides gebildet, welche durch die Punkte der Kurve C^2 gehen. Das gibt den Satz:

„Der geometrische Ort der Schnittpunkte zu einander normaler Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloides ist eine Hyperbel, deren Ebene zur Achse des Paraboloides senkrecht steht. Vergl. Plücker, System (1846), S. 208. Die Tangentialebenen des Paraboloides in den Punkten dieser Hyperbel umhüllen einen parabolischen Kegel, dessen Achse mit jener des Paraboloides zusammenfällt und dessen Fokalgeraden auf den Richtebenen des Paraboloides senkrecht stehen.

Der Zylinder, welcher durch die genannte Hyperbel geht, und dessen Erzeugenden zur Achse des Paraboloides parallel sind, repräsentiert

den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller auf dem Paraboloide liegenden gleichseitigen Hyperbeln."

Auch hier ist natürlich der Satz „dessen Achse mit jener des Paraboloides zusammenfällt", zu berichtigen in „dessen eine imaginäre Achse mit der Achse des Paraboloides zusammenfällt".

Die Beurteilung der Rupp schen Untersuchungen ist bereits in der Einleitung gegeben, vergl. S. 8. Wir fügen hier nur weniges hinzu.

Der Satz, dass die durch denselben Raumpunkt gehenden hyperzyklischen Ebenen irgend einer Fläche 2. Grades einen Kegel umhüllen, dessen Achsen jenen der gegebenen Fläche parallel sind, war vor Rupp schon von Schlömilch ausgesprochen worden, vergl. S. 62. Aber während dieser ihn durch Induktion erhält als Zusammenfassung der für die einzelnen Flächen gültigen Sätze und ihn nur unvollständig begründet, weil die Untersuchung des hyperbolischen Zylinders und des Ebenenpaares fehlt, gewinnt Rupp diesen Kernsatz der Theorie unmittelbar aus dem Hülfssatz und leitet die für bestimmte Flächen gültigen Sätze erst aus diesem allgemeineren ab durch Betrachtung der für dieselben eintretenden Abänderungen. Dies Verfahren hat vor dem Schlömilchs den Vorzug, dass es die Verwandtschaft aller Flächen, die gleichseitige Hyperbelschnitte zulassen, klarer erkennen lässt. Ausser bei den Genannten findet sich dieser Satz in voller Allgemeinheit in der bisherigen Literatur nicht ausgesprochen, so viel der Verfasser weiss.

Anhang.

Eine weitere synthetische und zugleich konstruktive Behandlung des Problemes der gleichseitigen Hyperbelschnitte gab **K. Schober** in einer Arbeit „Über die Konstruktion der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der Flächen 2. Grades“ [1]), die nach Angabe des Jahrb. über die Fortschritte der Math., Bd. XXVII, die beiden dreiachsigen Hyperboloide, die entsprechenden Rotationsflächen, das hyperbol. Paraboloid, den hyperb. Zylinder und den Kegel im einzelnen untersucht. Von den Resultaten wird hervorgehoben, dass das zweischalige Hyperboloid nur dann nach Hyperbeln geschnitten werden kann, wenn die reelle Achse nicht die grösste der drei Achsen ist, dass alle Ebenen, welche durch einen Punkt gehend, nach gleichseitigen Hyperbeln schneiden, einen elliptischen Kegel einhüllen, dessen innere Achse mit der kleinsten des Hyperboloides parallel ist, und endlich, dass beim einschaligen dreiachsigen Hyperboloid der Ort derjenigen Punkte, in denen die beiden durch sie bestimmten Erzeugenden zu einander normal sind, eine Kurve 4. Ordnung ist, vergl. O. Rupp. Auf die gleichseitigen Flächen scheint danach Schober nicht besonders eingegangen zu sein.

Im selben Bande der „Monatshefte für Mathematik“ findet sich auch eine Abhandlung von **W. Rulf**: Über die Bestimmung jener gleichseitigen Hyperbeln eines Kegels 2. Grades, welche eine Hauptebene des letzteren zur Symmetrieebene haben“ [2]). Rulf gibt eine rein geometrische Konstruktion der gleichseitigen Hyperbeln,

---

[1]) K. Schober: Über die Konstruktion der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der Flächen 2. Grades, Monatshefte für Math. 7, S. 111—128 (1896).

[2]) W. Rulf: Über die Bestimmung jener gleichseit Hyperbeln usw., Monatshefte für Math. 7, S. 93—96 (1896).

welche der genannten Bedingung genügen, bedient sich aber nach Ausweis des Jahrb. ü. d. Fortschr. d. Math., Bd. XXVII bei der Ableitung auch der analytisch-geometrischen Darstellung. Diese nur drei Seiten lange Bearbeitung einer ganz speziellen Frage, über die der Verfasser nichts weiter ermitteln konnte, führt somit hinüber zu den analytisch-geometrischen Behandlungen des Problems der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte, deren Besprechung sich hier anschliessen mag.

II. Kapitel.

Die analytisch-geometrischen Arbeiten über gleichseitig-hyperbolische Schnitte von Flächen 2. O.

Von den vier in der Einleitung angeführten analytisch-geometrischen Behandlungen der Aufgabe, welche sich auf die Frage nach den auf den Linienflächen 2. O. gelegenen Paaren aufeinander normaler Erzeugenden beziehen, kennt der Verfasser aus eigener Anschauung nur die Plückersche. Plücker leitet bereits die später von Rupp synthetisch begründeten Sätze ab, dass die Scheitelpunkte der in Frage stehenden rechten Winkel beim Hyperboloid auf seiner Durchschnittskurve mit der sogen. Mongeschen Kugel, beim Paraboloid auf einer Hyperbel liegen, deren Ebene auf der Hauptachse des Paraboloides senkrecht steht, und fügt hinzu, dass beim gleichseitigen Paraboloid diese Ebene mit der Scheitelebene der Fläche identisch ist (vergl. S. 33, Anm. 1). Bezüglich des Inhaltes der Arbeiten von Lhuilier, Hans und Bruno sei auf dieselbe Anmerkung verwiesen.

Ohne aus den in der Einleitung angegebenen Gründen hierauf weiter einzugehen, wenden wir uns denjenigen analytisch-geometrischen Arbeiten zu, welche dasselbe Thema behandeln, wie der II. Teil dieser Abhandlung, nämlich die Frage nach der Möglichkeit gleichseitig-hyperbolischer Schnitte und der Lage der hyperzyklischen Ebenen.

§ 4.

Die erste kurze Notiz über gleichs.-hyperbol. Schnitte von Flächen 2. Grades, welche sich durch ihre Eleganz auszeichnet, finden wir bei **Plücker,** System S. 154, 155.

Ihr Inhalt ist folgender:

In der Mittelpunktsgleichung der Flächen zweiter Ordnung

$$1)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz = 1$$

bedeuten die Koeffizienten A, A', A'' die Quadrate der reziproken Werte derjenigen drei Halbmesser, welche in die drei bezüglichen Koordinatenachsen fallen. Bei Transformation der Gleichung 1) auf irgendein neues, mit dem vorigen konzentrisches, rechtwinkliges Koordinatensystem bleibt die Summe der drei Koeffizienten der rein quadratischen Glieder stets dieselbe, nämlich gleich $A + A' + A'' = \text{const.}$, d. h.:

> „Wenn man ein System dreier aufeinander senkrechten, im Mittelpunkt einer Fläche der zweiten Ordnung sich schneidenden geraden Linien um den Mittelpunkt beliebig sich drehen lässt, so bleibt für alle Lagen die Quadratsumme der reziproken Werte der in die jedesmaligen drei geraden Linien fallenden Halbmesser der Fläche konstant."

Ist die gegebene Fläche eines der beiden Hyperboloide und wählt man irgendeine Seite seines Asymptotenkegels zur X-Achse des neuen Koordinatensystems, so wird $A = 0$, also $A' + A'' = \text{const.}$, d. h. jede auf einer Seite des Kegels in seinem Scheitel senkrecht stehende Ebene schneidet die Fläche in solchen Kurven, für welche die Quadratsumme der reziproken Werte der Halbachsen immer dieselbe ist. Alle diese Ebenen umhüllen einen andern Kegel 2. Grades, dessen Beziehung zu dem gegebenen eine wechsel-

seitige ist (nämlich den Polarkegel des gegebenen). Öffnet sich der gegebene Kegel so weit, dass die grössere Achse einer zur Kegelachse senkrechten Schnittellipse von der Spitze aus unter einem rechten Winkel gesehen wird, so ist dieser der einzige in der Kegelfläche. Ist jener Winkel dagegen ein stumpfer, so gibt es in dem Kegel unendlich viele Paare aufeinander senkrechter Erzeugenden. Wählen wir irgend zwei solche zu einander normale Kegelseiten zur X- und Y-Achse, so wird gleichzeitig $A = 0$ und $A' = 0$, also $A'' = \text{const.}$ Wird für eine einzelne Lage auch $A'' = 0$, so gilt das für alle Lagen. In diesem Falle wird jedesmal auch die dritte Achse der Fläche unendlich gross, also ebenfalls eine Seite des Asymptotenkegels, welcher demnach unendlich viele Tripel normaler Kegelstrahlen enthält. Das gibt den Satz:

„In einen Kegel, in welchen sich eine rechtwinklige körperliche Ecke beschreiben lässt, lassen sich solcher Ecken unendlich viele beschreiben, und durch die 6 Kanten zweier solcher Ecken mit gemeinschaftlichem Scheitel lässt sich immer eine Kegelfläche der 2. Ordnung legen."

Die Bedingung hierfür ist nach dem Vorigen:

$$A + A' + A'' = 0\ ^{1}).$$

„Infolge dieser Bedingungsgleichung ist, wenn bloss A verschwindet, $(A' + A'')$ notwendig gleich Null. Flächen der fraglichen Art werden also von solchen Ebenen, die auf den Seiten des Asymptotenkegels senkrecht stehen, in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten."

---

[1]) Vergl. Vogt, S. 17; Schröter, S. 27. Desgl. Magnus, Aufgaben 2 (1837) S. 323. Letzterer findet als Bedingung dafür, dass sich in einen Kegel

$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz = 0$$

eine dreikantige rechtwinklige Ecke einbeschreiben lässt:

$$a + b + c = 0.$$

Für die allgemeine Gleichung der Fläche 2. Ordnung:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

hat diese Bedingung dieselbe Form:

$$A + A' + A'' = 0.$$

Plücker fügt hinzu, dass der Ausgangssatz auch für den Zylinder gilt, für den, wenn wir ihn als geraden Zylinder betrachten, $A + A' + A'' =$ const. der Quadratsumme der reziproken Werte der Halbachsen seiner Basis gleich ist. Ist diese eine gleichseitige Hyperbel, so bestehen die letzten Bedingungsgleichungen.

Der Bedingung

$$A + A' + A'' = 0$$

genügen von den Mittelpunktsflächen 2. O., deren Gleichung 1) ist, die beiden gleichseitigen Hyperboloide und der gleichseitige Kegel, welcher als Asymptotenkegel der gleichseitigen Hyperboloide aufgefasst werden kann. Für diese Flächen gewinnt Plücker gleichzeitig durch die eine Betrachtung das Resultat, dass sie von allen auf den Seiten des Asymptotenkegels senkrecht stehenden Ebenen in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten werden.

Es sei noch einmal hervorgehoben, dass Plücker der erste ist, der diesen Satz aussprach, da die Arbeiten von Vogt und Schröter, die auf synthetischem Wege zu demselben Resultat gelangen, erst 33, bezw. 34 Jahre später erschienen. Erst wenn man sich dies vergegenwärtigt und bedenkt, dass Plücker von ganz allgemeinem Gesichtspunkt aus die Untersuchung aller drei Flächen durch dieselbe Gedankenfolge erledigt, kann man die glänzende Art seiner Beweisführung voll würdigen.

Plücker selbst dehnt das Resultat auch auf den geraden Zylinder aus, dessen Basis eine gleichseitige Hyperbel ist, gibt sich aber mit der Andeutung zu-

frieden, dass für diesen Zylinder die Bedingungsgleichungen

$$A + A' + A'' = 0, \text{ bezw. } \mathcal{A} + \mathcal{A}' + \mathcal{A}'' = 0$$

bestehen, ohne den daraus folgenden Satz auszusprechen.

Im folgenden wollen wir diese Lücke ausfüllen und werden sehen, dass für die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte des „gleichseitigen" Zylinders, wie wir kurz sagen wollen, ein Satz von ebenso grosser Allgemeinheit folgt wie für die der gleichseitigen Hyperboloide, und dass dieser Satz ein Spezialfall des für die gleichseitigen Hyperboloide gültigen ist.

Bei dem Beweise bedienen wir uns der modernen Schreibweise der Formeln.

I.

Zunächst bemerken wir, dass der „gleichseitige" Zylinder als derjenige Spezialfall der gleichseitigen Hyperboloide aufgefasst werden kann, in dem eine ihrer Achsen unendlich gross wird, zugleich derjenige Fall, für den die beiden Hyperboloide ineinander übergehen, also ihre Verschiedenheit einbüssen. Wir begründen diese Auffassung des hyperbolischen Zylinders allgemein. Ist nämlich die Basis des geraden Zylinders eine Hyperbel, deren Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sei, so ist diese Gleichung zugleich die des Zylinders, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen dritte Achse auf der Ebene der Hyperbel im Mittelpunkte derselben senkrecht steht, d. h. bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen eine ausgezeichnete Achse der Durchschnitt der Asymptotenebenen ist. Diese Gleichung geht aus derjenigen der beiden Hyperboloide

$$\pm \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

hervor für $a = \infty$, d. h. damit die Hyperboloide zum hyperbolischen Zylinder ausarten, muss beim einschaligen die eine der beiden reellen, beim zweischaligen die eine der beiden imaginären Achsen unendlich gross werden. Die Erzeugenden des einschaligen Hyperboloides werden dann alle untereinander und zu der ausgezeichneten Achse parallel, die beiden Regelscharen fallen also zusammen. Der Asymptotenkegel der Hyperboloide wird zu den Asymptotenebenen des hyperbolischen Zylinders. Waren die Hyperboloide gleichseitig, so ist der aus ihnen hervorgehende hyperbolische Zylinder ebenfalls gleichseitig, denn aus

$$\pm \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0$$

ergibt sich für $a = \infty$

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0 \text{ oder } b = c.$$

Die Basis des Zylinders ist also eine gleichseitige Hyperbel

$$y^2 - z^2 = b^2,$$

und seine Asymptotenebenen stehen aufeinander senkrecht.

Dabei kann, wie wir gleich sehen werden, die Definition des gleichseitigen Kegels als eines solchen, der unendlich viele Tripel zu einander normaler Kegelstrahlen enthält, auf die Asymptotenebenen des gleichseitigen Zylinders ausgedehnt werden, wenn man bedenkt, dass den Kegelstrahlen alle in den Asymptotenebenen gelegenen Geraden entsprechen.

Aus diesem Grunde zählt der Verfasser ganz allgemein zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen mit zu den (zerfallenden) „gleichseitigen" Flächen 2. O.

Auf den gleichseitigen Zylinder selbst findet nur die allgemeine Definition des gleichseitigen Hyper-

boloides Anwendung; sie nimmt hier die Gestalt an: Ein hyperbolischer Zylinder ist gleichseitig, wenn seine Asymptotenebenen auf einander senkrecht stehen. Dagegen die von Vogt und Schröter benutzte Definition des einschaligen gleichseitigen Hyperboloids versagt hier, da die Erzeugenden des gleichseitigen Zylinders alle einander parallel sind.

II.

Durch Drehung des Koordinatensystems entsprechend den Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} y &= \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta \\ z &= \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned}\right.$$

geht die Gleichung des hyperbolischen Zylinders

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

über in

$$\xi^2\left(\frac{\alpha_2^2}{b^2} - \frac{\alpha_3^2}{c^2}\right) + \eta^2\left(\frac{\beta_2^2}{b^2} - \frac{\beta_3^2}{c^2}\right) + \zeta^2\left(\frac{\gamma_2^2}{b^2} - \frac{\gamma_3^2}{c^2}\right)$$

$$+ 2\eta\zeta\left(\frac{\beta_2\gamma_2}{b^2} - \frac{\beta_3\gamma_3}{c^2}\right) + 2\zeta\xi\left(\frac{\gamma_2\alpha_2}{b^2} - \frac{\gamma_3\alpha_3}{c^2}\right)$$

$$+ 2\xi\eta\left(\frac{\alpha_2\beta_2}{b^2} - \frac{\alpha_3\beta_3}{c^2}\right) = 1,$$

nimmt also die Form der Gleichung 1) bei Plücker an, und man sieht sofort, dass die Summe der Koeffizienten von ξ^2, η^2 und ζ^2, die dem Ausdruck $A + A' + A''$ bei Plücker entspricht, gleich der Summe der Koeffizienten von y^2 und z^2 in der ursprünglichen Gleichung ist, dass diese also für alle mit dem ursprünglichen konzentrische Koordinatensysteme denselben konstanten Wert

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = \text{const.}$$

behält. Die einzige Voraussetzung, an die die Gleichungsform 1) beim hyperbolischen Zylinder gebunden ist, ist die, dass das Koordinatensystem so gewählt wird, dass sein Anfangspunkt in der Schnittachse der Asymptotenebenen liegt.

Wir beziehen uns jetzt wieder auf die Gleichung

1) $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz = 1.$

Die Koeffizienten A, A' und A'' haben dieselbe Bedeutung wie bei den Hyperboloiden; sie werden also einzeln gleich Null, wenn die betreffende Achse unendlich gross wird, also in einer der Asymptotenebenen gelegen ist.

Nach unsern obigen Ausführungen ist die Bedingung für den gleichseitigen Zylinder

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0,$$

d. h. auf die Gleichung 1) angewendet:

$$A + A' + A'' = 0,$$

worauf Plücker bereits aufmerksam macht. Bezieht man den gleichseitigen Zylinder auf ein Koordinatensystem, dessen x-Achse in einer der beiden Asymptotenebenen liegt, so folgt aus der Bedingungsgleichung, da $A = 0$ wird, dass jede auf dieser Achse senkrecht stehende Ebene den Zylinder in einer Kurve schneidet, für die $(A' + A'') = 0$ ist, d. h. in einer gleichseitigen Hyperbel. Alle diese Ebenen stehen auch auf der betreffenden Asymptotenebene senkrecht. Gibt man der x-Achse nacheinander alle möglichen Lagen in beiden Asymptotenebenen, so erhält man für alle auf den Asymptotenebenen senkrecht stehenden Ebenen dasselbe Resultat. Ist umgekehrt irgend ein gleichseitig-hyperbolischer Schnitt gegeben und wählt man das Koordinatensystem so, dass seine Ebene der yz-Ebene parallel wird, so ist in Gleichung 1) $(A' + A'') = 0$, infolge der Bedingungsgleichung also auch $A = 0$, d. h. die auf der

Schnittebene senkrecht stehende Achse fällt in eine der beiden Asymptotenebenen, die Ebene der gleichseitigen Hyperbel steht also auf dieser senkrecht. Das gibt den Satz:

1. Alle Ebenen, welche den gleichseitigen Zylinder in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, stehen auf (mindestens) einer der beiden Asymptotenebenen senkrecht und umgekehrt.

Die einzige Ausnahme bilden die Asymptotenebenen selbst und die ihnen parallelen Ebenen, welch letzteren in einer endlichen und einer unendlich fernen Geraden schneiden.

Mit Berücksichtigung des auf S. 22 Ausgeführten können wir diesen Satz auch so aussprechen:

2. Alle Ebenen, welche einen gleichseitigen Zylinder in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, sind den Ebenen zweier Ebenenbüschel parallel, deren Achsen zwei in den Asymptotenebenen auf einem beliebigen Punkte ihrer Schnittlinie senkrecht stehende Gerade sind.

III.

Setzt man in der Gleichung 1) auf der rechten Seite Null, so bedeutet dieselbe den Asymptotenkegel der zugehörigen Fläche, im Falle des hyperbolischen Zylinders also seine beiden Asymptotenebenen, welche, wenn

$$A + A' + A'' = 0$$

ist, aufeinander senkrecht stehen. Ist in einer Schnittebene $(A' + A'') = 0$, so stehen die beiden Schnittgeraden aufeinander senkrecht. Mithin geben die letzten Sätze für die Asymptotenebenen des gleichseitigen Zylinders unmittelbar dieselben beiden Sätze, welche wir bereits in Fortsetzung der Vogtschen Untersuchungen für die Richtebenen des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides gefunden hatten, und

welche ganz allgemein für irgend zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen gelten.

Denjenigen Satz, der am deutlichsten das Verhältnis des Paares aufeinander senkrecht stehender Ebenen zum gleichseitigen Kegel erkennen lässt, erhält man auf folgende Weise:

Wählt man als x-Achse und y-Achse zwei in den Asymptotenebenen des gleichseitigen Zylinders 1) gelegene Gerade, so wird gleichzeitig $A = 0$ und $A' = 0$, also auch $A'' = 0$, d. h. auch die dritte Achse liegt in einer der beiden Asymptotenebenen.

Es gibt also zu jeder Geraden in einer der beiden Ebenen zwei weitere in den Ebenen gelegene Gerade, die auf der gegebenen und aufeinander senkrecht stehen. Oder:

3. Zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen enthalten unendlich viele Tripel zu einander normaler Geraden und umgekehrt:
4. Zwei sich schneidende Ebenen, die ein Tripel zu einander normaler Geraden enthalten, enthalten deren unendlich viele. Die Ebenen stehen aufeinander senkrecht.

Alle diese Sätze stellen nur Spezialfälle des von Plücker für die gleichseitigen Hyperboloide abgeleiteten Satzes dar.

IV.

Das gemeinsame Merkmal der fünf behandelten „gleichseitigen" Flächen bestand darin, dass ihre Gleichung die Form

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

annehmen konnte, wenn man als Koordinatenanfangspunkt den Mittelpunkt der Fläche, bezw. einen Punkt auf der Schnittachse der Asymptotenebenen wählte,

und dass dann zwischen den Koeffizienten der rein quadratischen Glieder die Bedingung bestand:

$$A + A' + A'' = 0.$$

Die sechste gleichseitige Fläche 2. Ordnung, das gleichs. hyperbol. Paraboloid, genügt diesen Anforderungen nicht. Plücker erwähnt es daher gar nicht.

Nichtsdestoweniger können wir auch für diese Fläche die entsprechenden Sätze durch eine der Plückerschen analoge Betrachtung gewinnen. Wir deuten das Verfahren nur kurz an, da die Sätze selbst auf Seite 21 schon synthetisch bewiesen sind und im II. Teil auf anderm Wege analytisch gefunden werden.

Die Scheitelpunktsgleichung des hyperbolischen Paraboloides hat im allgemeinen die Form

$$2)\ Ax^2 + A'y^2 + Az''^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz + 2Cx + 2C'y + 2C''z = 0.$$

Hierin bleibt bei allen konzentrischen Drehungen des Koordinatensystems die Summe der drei Koeffizienten der rein quadratischen Glieder konstant, nämlich gleich

$$A + A' + A'' = \text{const.}$$

Ist das Paraboloid gleichseitig, so ist für alle Lagen des Koordinatensystems, sofern der Anfangspunkt im Scheitel der Fläche liegt,

$$A + A' + A'' = 0,$$

da diese Bedingung für die Hauptachsengleichung

$$y^2 - z^2 - 2b^2x = 0\ ^1)$$

erfüllt ist. Setzt man nun in 2) zugleich $y = 0$ und

---

[1]) Die Gleichung geht aus

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 2x = 0 \text{ hervor für } \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0 \text{ oder } c = b.$$

Die in den beiden zu einander senkrechten Hauptebenen gelegenen Parabeln sind beim gleichseitigen Paraboloid kongruent.

$z = 0$, so erhält man $Ax^2 + 2Cx = 0$ oder, da nicht identisch $x = 0$ ist,

$$x = -\frac{2C}{A}.$$

Jedesmal wenn $A = 0$ wird, ist $x = \infty$ und umgekehrt, wenn wir die Annahme $C = \infty$ als sinnlos ausschliessen. Für $A = 0$ wird also genau wie beim Hyperboloid der in die x-Achse fallende Halbmesser der Fläche unendlich gross. Das trifft nur zu für die vom Paraboloid-Scheitel ausgehenden und in den Richtebenen

$$y^2 - z^2 = 0, \text{ bzw.}$$

$$2') \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz = 0,$$

gelegenen Strahlbüschel. Jede auf einem solchen Strahle senkrecht stehende Ebene, die zugleich auf der Richtebene senkrecht steht, welcher der Strahl angehört, schneidet in einer Kurve, für die $(A' + A'') = 0$, also in einer gleichseitigen Hyperbel.

Das gilt für alle Strahlen der beiden Strahlbüschel, mithin für alle auf (mindestens) einer der beiden Richtebenen senkrecht stehenden Ebenen und nur für diese. Damit sind die auf Seite 21, 22 angeführten Sätze wiedergewonnen.

V.

Alle sechs *„gleichseitigen" Flächen* sind dadurch gekennzeichnet, dass in der allgemeinen Gleichung einer Fläche 2. Ordnung

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz + 2Cx + 2C''y + 2C''z + D = 0,$$

wenn sie eine gleichseitige Fläche darstellen soll,

$$A + A' + A'' = 0$$

ist. In moderner Schreibweise heisst das:

Die allgemeine Gleichung 2. Grades

$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

repräsentiert eine der sechs gleichseitigen Flächen 2. O.,

wenn

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = A_{44}'' = 0$$

ist.

§ 5.

Unabhängig von Plücker lieferte 15 Jahre später **Schlömilch** einen wertvollen Beitrag[1]) zur Frage der gleichseitigen Hyperbeln auf einer Fläche 2. Grades, der sich ebenfalls der analytisch-geometrischen Methode bedient.

Schlömilch untersucht zuerst die beiden Hyperboloide und den reellen Kegel, dann das hyperbolische Paraboloid mit Rücksicht auf die gleichseitigen Hyperbelschnitte und erhält in beiden Fällen als Ort der hyperzyklischen Ebenen einen Kegel 2. Grades, dessen Gleichung er angibt und zum Teil diskutiert.

I.

Für *die beiden Hyperboloide und den elliptischen Kegel* wird die gemeinsame Gleichung:

$$1)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon \quad \begin{cases} \varepsilon = +1 & \text{Einschal. Hyperbol.} \\ \varepsilon = 0 & \text{Kegel} \\ \varepsilon = -1 & \text{Zweischal. Hyperbol.} \end{cases}$$

gewählt, wofür man auch schreiben kann:

$$2)\qquad mx^2 + ny^2 - z^2 = \varepsilon c^2,$$

wenn

$$\frac{c^2}{a^2} = m, \quad \frac{c^2}{b^2} = n$$

gesetzt wird.

Diese Flächen sollen von einer Ebene geschnitten werden. Die Schnittkurve erhält man, wenn man 2) auf ein neues räumliches Koordinatensystem $O'/x'y'z'$

[1]) Schlömilch, „Über die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der Flächen 2. Grades", Schlömilchs Zeitschrift für Math. u. Phys., 6. Jahrgang 1861, S. 418 ff.

Auch in Schlömilchs Lehrbuch der anal. Geom. d. Raumes, 3. Aufl., S. 189, 200, 210 finden sich diesbezügliche Abschnitte.

transformiert, dessen x'y'-Ebene mit der gegebenen Ebene identisch ist, und wenn man dann in den Transformationsgleichungen überall $z' = 0$ setzt. Dabei wählt Schlömilch als x'-Achse die Spur der gegebenen Ebene in der xy-Ebene, welche mit der positiven x-Achse den Winkel ψ bilden möge, als Koordinatenanfangspunkt O' des neuen Systems einen beliebigen Punkt dieser Geraden mit den Koordinaten $x = g$, $y = h$ im ursprünglichen System und als y'-Achse die im Punkte gh in der gegebenen Ebene auf x' senkrecht stehende Gerade. Der Neigungswinkel der x'y'-Ebene gegen die xy-Ebene ist gleich dem Neigungswinkel der y'-Achse gegen die xy-Ebene. Bezeichnen wir ihn mit ϑ, so lauten die Transformationsgleichungen mit Berücksichtigung von $z' = 0$.

$$3)\quad \begin{cases} x = x' \cdot \cos\psi - y \cdot \sin\psi \cdot \cos\vartheta + g \\ y = x' \cdot \sin\psi + y' \cdot \cos\psi \cdot \cos\vartheta + h \\ z = y' \cdot \sin\vartheta \end{cases}$$

Vergl. die zur Veranschaulichung vom Verfasser hinzugefügte Figur 1.

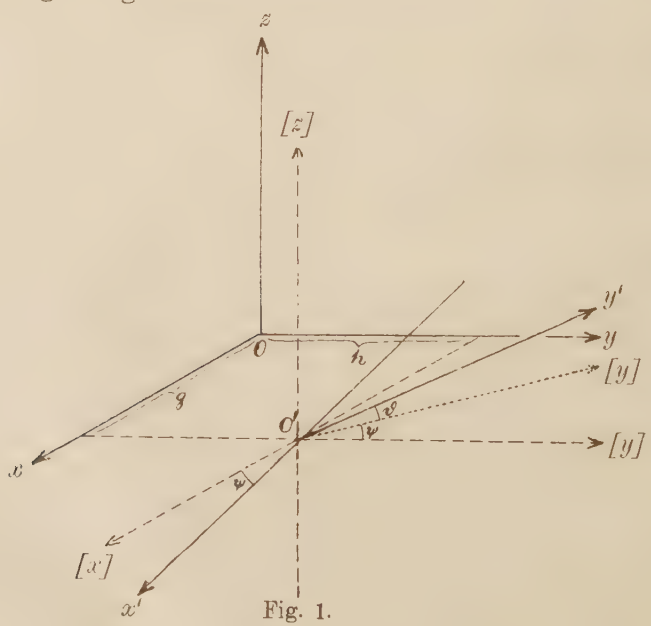


Fig. 1.

Die Gleichung der Schnittkurve, welche man durch Einsetzen der Werte 3) in die Gleichung 2) erhält, ist von der Form:

$$4)\quad Ax'^2 + By'^2 + 2Cx'y' + 2Dx' + 2Ey' + F = 0,$$

wo

$$A = m \cdot \cos^2\psi + n \cdot \sin^2\psi,$$
$$B = (m \cdot \sin^2\psi + n \cdot \cos^2\psi)\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta \text{ usw.}$$

Die Gleichung 4) ist die allgemeine Kegelschnittgleichung, sie stellt im besonderen eine gleichseitige Hyperbel dar, wenn die Summe der Koeffizienten der beiden rein quadratischen Glieder Null ist, also $A + B = 0$. Dafür können wir mit Benutzung der angegebenen Werte von A und B schreiben:

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{m+n}{(1-m)\cdot\cos^2\psi + (1-n)\cdot\sin^2\psi}$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$p = \frac{1-m}{m+n} = \frac{(a^2-c^2)\,b^2}{(a^2+b^2)\,c^2},\quad q = \frac{1-n}{m+n} = \frac{(b^2-c^2)\,a^2}{(a^2+b^2)\,c^2}$$

setzt:

$$5)\qquad \operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{1}{p\cdot\cos^2\psi + q\cdot\sin^2\psi}.$$

Nimmt man als Gleichung der Schnittebene

$$6)\qquad \lambda x + \mu y + z = \rho$$

an, so drücken sich die Winkel ϑ und ψ folgendermassen aus:

$$7)\quad \operatorname{tg}^2\vartheta = \lambda^2 + \mu^2,\ \cos^2\psi = \frac{\mu^2}{\lambda^2+\mu^2},\ \sin^2\psi = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2}$$

und unsere Bedingungsgleichung 5) wird zu

$$8)\qquad p\mu^2 + q\lambda^2 = 1,$$

derjenigen Bedingung, der die Koeffizienten λ und μ in der Gleichung 6) der Ebene genügen müssen, wenn dieselbe die Flächen 2) in gleichseitigen Hyperbeln schneiden soll. Daraus, dass in 8) ρ nicht vorkommt, geht hervor, dass alle parallelen Ebenen ähnliche Schnittkurven liefern, so dass es genügt, wenn man die durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Ebenen

9) $$\lambda x + \mu y + z = 0$$

betrachtet. Hierin kann man λ als veränderlichen Parameter ansehen, während μ nach Gleichung 8) von λ abhängig, also eine Funktion von λ ist. Durch Differentiation von 8) und 9) nach λ und Elimination von $\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}$ erhält man

10) $$q\lambda y - p\mu x = 0.$$

Durch Elimination von λ und μ aus den drei Gleichungen 8), 9) und 10) findet Schlömilch endlich für den geometrischen Ort der die Flächen 2) in gleichseitigen Hyperbeln schneidenden Ebenen 9) die Gleichung:

$$px^2 + qy^2 = pqz^2$$

oder

11) $$\frac{x^2}{a^2(b^2 - c^2)} + \frac{y^2}{b^2(a^2 - c^2)} - \frac{z^2}{c^2(a^2 + b^2)} = 0.$$

Diese Gleichung stellt im allgemeinen eine *Kegelfläche* dar, deren Lage von der Rangordnung der Grössen a, b, c abhängt.

Die Betrachtung der verschiedenen Fälle ergibt nach Schlömilch:

„Ist nämlich c die kleinste Halbachse, so fällt die Kegelachse mit der z-Achse zusammen und die Formel 5) oder

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta = \frac{(a^2 + b^2)\, c^2}{b^2(a^2 - c^2) \cdot \cos^2 \psi + a^2(b^2 - c^2) \cdot \sin^2 \psi}$$

liefert für alle ψ reelle ϑ, d. h. die Schnittebenen umhüllen den Kegel vollständig. Wenn zweitens c zwischen a und b liegt, und zwar so, dass $a > c > b$ ist, so fällt die Kegelachse in die y-Achse und der Winkel ϑ bleibt nur so lange reell als

$$\operatorname{tg}^2 \psi < \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2(c^2 - b^2)},$$

genommen wird; die Umhüllung ist dann eine teilweise. Für $b > c > a$ fällt die Kegelachse in die x Achse; zur Realität von ϑ gehört die Bedingung

$$\operatorname{tg}^2\psi > \frac{b^2(c^2-a^2)}{a^2(b^2-c^2)},$$

so dass auch hier nur eine teilweise Umhüllung stattfindet. Ist endlich c die grösste Halbachse, so werden gleichseitig-hyperbolische Schnitte unmöglich."

Hierin liegt ein doppelter Irrtum vor, einmal indem Schlömilch in den Fällen $a > c > b$ und $b > c > a$ von einer nur teilweisen Umhüllung des Ortskegels durch die Ebenen der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte spricht, sodann in den Bedingungen, denen in diesen Fällen ψ genügen muss, damit ϑ reell sei, die beide von Schlömilch ungenau angegeben sind. Wir behandeln den zuletztgenannten Irrtum zuerst. Den Wert von $\operatorname{tg}^2\vartheta$ schreiben wir:

im Falle $a > c > b$:

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{\dfrac{(a^2+b^2)c^2}{a^2(c^2-b^2)\cdot\cos^2\psi}}{\dfrac{b^2(a^2-c^2)}{a^2(c^2-b^2)} - \operatorname{tg}^2\psi},$$

im Falle $b > c > a$:

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{\dfrac{(a^2+b^2)c^2}{a^2(b^2-c^2)\cdot\cos^2\psi}}{-\dfrac{b^2(c^2-a^2)}{a^2(b^2-c^2)} + \operatorname{tg}^2\psi}.$$

Zur Realität des Winkels ϑ ist erforderlich, dass die Werte für $\operatorname{tg}^2\vartheta$ positiv sind; da die Zähler in beiden Fälsen notwendig positiv sind, so ist die Bedingung erfüllt, wenn auch die Nenner positiv sind, also

im Falle $a > c > b$:

$$\operatorname{tg}^2\psi < \frac{b^2(a^2-c^2)}{a^2(c^2-b^2)},$$

im Falle $b > c > a$:

$$\operatorname{tg}^2\psi > \frac{b^2(c^2-a^2)}{a^2(b^2-c^2)}$$

ist.

Soweit hat Schlömilch recht. Nun übersieht er aber, dass ϑ auch dann reell bleibt, wenn in den Werten für $\operatorname{tg}^2\vartheta$ die Nenner Null sind, wenn also $\operatorname{tg}^2\vartheta = \infty$ ist. Dann haben wir den besonderen Fall, dass $\vartheta = 90^0$ ist, also die in einer gleichseitigen Hyperbel schneidende Ebene auf der xy-Ebene senkrecht steht, d. h. durch die z-Achse geht, bzw. ihr parallel ist.

Dieser Fall tritt ein für folgende Werte von $\operatorname{tg}^2\psi$:

im Falle $a > c > b$:

$$\operatorname{tg}^2\psi = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2(c^2 - b^2)},$$

im Falle $b > c > a$:

$$\operatorname{tg}^2\psi = \frac{b^2(c^2 - a^2)}{a^2(b^2 - c^2)},$$

die also noch zu den vorigen hinzuzunehmen sind und in jedem Falle zwei Grenzwerte von ψ liefern.

Aus dieser Beschränkung des Winkels ψ folgt nun aber keineswegs, wie Schlömilch will, eine nur teilweise Umhüllung des Ortskegels durch die Schnittebenen, vielmehr liefert in allen Fällen jede Tangentialebene des Kegels 11) mit den Flächen 2) gleichs. - hyperbol. Schnitte. Der Unterschied der Fälle $a > c > b$ und $b > c > a$ gegenüber den Fällen $a > b > c$ und $b > a > c$ liegt vielmehr darin, dass, wenn c die kleinste Halbachse ist, der Ortskegel 11) ganz innerhalb der Flächen 2) liegt, während er, wenn c die an Grösse mittlere Halbachse ist, die Flächen schneidet, also nur teilweise von ihnen eingeschlossen wird.

Oder sonst: Die Spuren der Tangentialebenen des Kegels 11) in der xy-Ebene bilden mit der x-Achse Winkel, die im Falle $a > c > b$ zwischen 0^0 und dem berechneten ψ, im Falle $b > c > a$ zwischen 90^0 und dem berechneten ψ liegen, während sie, wenn c die kleinste Halbachse ist, einen vollständigen Strahlbüschel um O bilden.

II.

In einem zweiten Teile lässt dann Schlömilch die Untersuchung der gleichseitigen Hyperbelschnitte des hyperbolischen Paraboloides folgen, für welches er die Gleichung

$$12) \qquad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$$

zugrunde legt.

Führt man auch hier die Transformation 3) aus, so erhält man als Gleichung der Schnittkurve wieder eine Gleichung von der Form 4), in der

$$A = \frac{\cos^2\psi}{a} - \frac{\sin^2\psi}{b}, \quad B = \left(\frac{\sin^2\psi}{a} - \frac{\cos^2\psi}{b}\right)\cos^2\vartheta$$

ist, so dass die Bedingung der gleichseitigen Hyperbel $A + B = 0$ hier die Form annimmt:

$$\cos^2\vartheta = \frac{b - a\,\mathrm{tg}^2\psi}{a - b\,\mathrm{tg}^2\psi}.$$

Durch Einführung des Winkels α der geradlinigen Horizontalspur des Paraboloides mit der x-Achse nimmt diese Bedingungsgleichung die Gestalt an:

$$13) \quad \cos^2\vartheta = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\psi}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\psi} = \mathrm{tg}\,(\alpha+\psi)\,\mathrm{tg}\,(\alpha-\psi).$$

Nun drückt Schlömilch wieder ϑ und ψ durch die Koeffizienten λ und μ der Schnittebene 6) aus und erhält:

$$\cos^2\vartheta = \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2 + 1}, \quad \mathrm{tg}^2\psi = \frac{\lambda^2}{\mu^2},$$

so dass die Bedingungsgleichung 13) nach Einsetzung dieser Werte und unter Benutzung der Abkürzungen

$$p = \frac{1}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{a}{a-b}, \quad q = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{b}{a-b}$$

zu 14) wird:

$$14) \qquad q\mu^2 - p\lambda^2 = 1.$$

Auch hier fehlt ρ. Parallele Ebenen liefern also ähnliche Schnitte.

Wir dürfen uns daher wieder auf die durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Ebenen beschränken. Ganz wie im Falle I erhält man als Gleichung der von den der Bedingung 14) genügenden Schnittebenen umhüllten Fläche

$$py^2 - qx^2 = pqz^2$$

oder

$$15) \qquad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{a-b} = 0.$$

„Diese Gleichung charakterisiert wiederum einen *elliptischen Kegel,* dessen Lage von der Rangordnung der Parameter a und b abhängt; die Kegelachse fällt nämlich mit der y - Achse oder mit der x - Achse zusammen, je nachdem $a > b$ oder $a < b$ ist. Ferner zeigt die Formel 13), dass $\alpha + \psi$ und $\alpha - \psi$ immer in denselben Quadranten enthalten sein müssen, dass also die Umhüllung nur eine teilweise ist."

Auch hier gilt bezüglich der teilweisen Umhüllung dasselbe, was schon auf S. 60 gesagt wurde, vergl. S. 164 ff. Einen ausgezeichneten Grenzfall haben wir hier für $\psi = \alpha$, indem dann aus 13) $\cot^2\vartheta = 0$ folgt, also $\vartheta = 90^0$. Zu den Tangentialebenen des Ortskegels 15) gehören danach auch die beiden Richtebenen des Paraboloides, welche durch seine Scheitelstrahlen und die z-Achse bestimmt sind. Hierauf kommen wir später zurück.

III.

Zum Schluss spricht Schlömilch das Gesamtergebnis in dem Satze aus:

> „Alle Ebenen, welche durch einen festen Punkt gehen und eine Fläche 2. Grades in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, berühren zugleich einen elliptischen Kegel, dessen Scheitel jener feste Punkt und dessen Achse parallel zur kleinsten Halbachse oder zum kleineren Parameter der Fläche liegt."

Der hyperbolische Zylinder und das Ebenenpaar werden von Schlömilch nicht berücksichtigt, obwohl er im Endsatze von den gleichseitigen Hyperbelschnitten einer Fläche 2. Grades überhaupt redet.

Legt man für das Paraboloid die vom Verfasser gewählte Gleichungsform

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2x = c$$

der Untersuchung zugrunde, so sind zwecks Übertragung in die Schreibweise des Verfassers in den auf das Paraboloid bezüglichen Formeln die Substitutionen zu machen:

$$x = y;\ y = z;\ z = x$$
$$a = b^2;\ b = c^2,$$

wobei Schlömilchs Bezeichnung voransteht. Führt man diese Substitutionen aus, so wird die Endgleichung 15) zu:

$$\frac{x^2}{b^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

stimmt also genau mit der Bedingungsgleichung 31) des Verfassers überein, vergl. S. 160.

---

§ 6.

Von den übrigen analytisch-geometrischen Behandlungen der Aufgabe steht die von **B. Hoppe** aus dem Jahre 1896 [1]) der Schlömilchschen am nächsten.

I.

Hoppe geht aus von dem Satze:

„Eine quadratische Gleichung zwischen den rechtwinkligen Koordinaten x, y, deren unabhängiger Term der Parameter μ sei, drückt bei Variation von μ und beliebiger Änderung der linearen Terme eine Schar ähnlicher Linien aus.

---

[1]) B. Hoppe, Gleichseitig-hyperbolischer Schnitt der Fläche 2. Grades, Archiv für Math. 14 (1896), S. 436 ff.

Einem Werte von μ entspricht ein Paar sich schneidender Geraden. Sind die Geraden reell, so ist die Linie eine Hyperbel und die Geraden sind ihre Asymptoten. Bilden die Asymptoten einen rechten Winkel, so ist die Hyperbel gleichseitig."

Dieser Satz, der in einem voraufgeschickten Abschnitt kurz bewiesen wird, dient als Hülfssatz für die folgenden Ausführungen; ebenso ein zweiter, den er auf folgende Weise gewinnt:

Die Gleichung

$$4) \quad -mx^2 - ny^2 + z^2 = \mu$$

drückt, wenn nicht gleichzeitig $m < o$, $n < o$, bei variierendem μ *eine Schar ähnlicher Hyperboloide* aus, die für $\mu = 0$ in ihren gemeinsamen Asymptotenkegel degenerieren. Transformiert man diese Gleichung auf ein neues rechtwinkliges System durch die Substitutionen

$$5) \quad \begin{cases} x = a\xi + a_1\eta + a_2\zeta \\ y = b\xi + b_1\eta + b_2\zeta \\ z = c\xi + c_1\eta + c_2\zeta \end{cases}$$

und setzt dann $\zeta = \text{const.}$, so erhält man den Schnitt der Flächenschar 4) mit einer der $\xi\eta$-Ebene des neuen Systems parallelen Ebene, für $\zeta = 0$ den Schnitt mit der durch O gehenden $\xi\eta$-Ebene selbst. Bei Ausführung dieser Substitution erhält man eine in ξ, η quadratische Gleichung, welche μ nur in der Konstanten, ζ nur in dieser und den linearen Gliedern enthält. Da über a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 nichts ausgemacht war ausser dass die Achsen ξ, η, ζ aufeinander senkrecht stehen sollen, so kann die Schnittebene jede beliebige Lage haben. Nach obigem Satze folgt dann:

„Ist der Schnitt für irgendein μ und irgendein ζ eine gleichseitige Hyperbel, so ist er es für jedes μ und jedes ζ,"

d. h. mit anderen Worten: Alle Hyperboloide der Schar 4) einschliesslich des gemeinsamen Asymptotenkegels werden von sämtlichen parallelen Ebenen in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten, falls eine der Ebenen eine Fläche der Schar in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet.

Auf Grund dieser beiden Sätze lässt sich nun die Aufgabe: „Ein gegebenes Hyperboloid durch eine Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel zu schneiden" zurückführen auf die einfachere: „Zwei aufeinander senkrechte Seiten eines gegebenen Kegels zu finden."

II.

Sei 4') das gegebene Hyperboloid, demnach

$$4') \quad -mx^2 - ny^2 + z^2 = 0$$

der *Asymptotenkegel* desselben, so genügen alle diejenigen Ebenen der Aufgabe, die zwei aufeinander senkrecht stehenden Erzeugenden des Kegels 4') parallel sind. Es kommt also darauf an, zwei solche Erzeugende des Kegels zu finden.

Da über die Lage des neuen Koordinatensystems $0\xi\eta\zeta$ gegenüber dem alten noch nichts festgesetzt ist, so können wir die beiden zu einander normalen Seiten des Kegels 4'), die wir als gefunden annehmen, zur ξ- und η-Achse des neuen Systems machen. Die Koordinaten ihrer Punkte genügen dann den Gleichungen:

$$x = a\xi, \; y = b\xi, \; z = c\xi$$

$$\text{bezw. } x = a_1\eta, \; y = b_1\eta, \; z = c_1\eta,$$

welche aus 5)' entstehen, indem man das eine Mal in 5) gleichzeitig $\zeta = 0$ und $\eta = 0$, das andere Mal gleichzeitig $\zeta = 0$ und $\xi = 0$ setzt. Diese Koordinaten müssen, da die beiden Geraden dem Kegel 4) angehören sollen, seiner Gleichung genügen. Durch Einsetzen ihrer Werte in 4') erhalten wir nach einer einfachen Umformung

$$6)\qquad \begin{cases} m\left(\frac{a}{c}\right)^2 + n\left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \\ m\left(\frac{a_1}{c_1}\right)^2 + n\left(\frac{b_1}{c_1}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Da ausserdem diese beiden Kegelseiten, d. h. die ξ- und η-Achse unseres neuen Systems, aufeinander senkrecht stehen sollen, so muss

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$$

sein oder:

$$7)\qquad \frac{a}{c}\cdot\frac{a_1}{c_1} + \frac{b}{c}\cdot\frac{b_1}{c_1} + 1 = 0,$$

eine weitere Bedingung für $\frac{a}{c}$, $\frac{a_1}{c_1}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{b_1}{c_1}$.

Nun ist leicht zu sehen, dass die Gleichungen 6) für $m > 0$, $n > 0$ befriedigt werden durch:

$$8)\qquad \begin{cases} \frac{a}{c} = \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{m}}, & \frac{b}{c} = \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{n}} \\ \frac{a_1}{c_1} = \frac{\cos\vartheta_1}{\sqrt{m}}, & \frac{b_1}{c_1} = \frac{\sin\vartheta_1}{\sqrt{n}}, \end{cases}$$

da sie unter Benutzung dieser Werte übergehen in die identischen Gleichungen: $\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$ und $\cos^2\vartheta_1 + \sin^2\vartheta_1 = 1$. 7) wird nach Einsetzung dieser Werte zu:

$$\frac{\cos\vartheta\cdot\cos\vartheta_1}{m} + \frac{\sin\vartheta\cdot\sin\vartheta_1}{n} + 1 = 0,$$

einer Bedingung, der ϑ und ϑ_1 genügen müssen, wenn durch die Werte 8) zwei aufeinander senkrecht stehende Erzeugende unseres Kegels 4') bestimmt sein sollen. Durch diese Bedingung ist ϑ_1 von ϑ abhängig gemacht. Die Auflösung ergibt:

$$9)\qquad \begin{cases} \cos\vartheta_1 = \dfrac{-\frac{\cos\vartheta}{m} \pm \frac{\Delta\sin\vartheta}{n}}{\Delta^2+1}; \quad \sin\vartheta_1 = \dfrac{-\frac{\sin\vartheta}{n} \mp \frac{\Delta\cos\vartheta}{m}}{\Delta^2+1} \\ \Delta^2 = \left(\frac{\cos\vartheta}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sin\vartheta}{n}\right)^2 - 1, \end{cases}$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\vartheta_1 = \delta \pm \varepsilon$$

$$\frac{\cos\vartheta}{m} = -\frac{\cos\delta}{\cos\varepsilon};\quad \frac{\sin\vartheta}{n} = -\frac{\sin\delta}{\cos\varepsilon}.$$

Hieraus findet Hoppe die Gleichung der gesuchten Schnittebene

$$a_2x + b_2y + c_2z = \text{const.}$$

nach den Relationen

$$a_2 = \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix},\quad b_2 = \begin{vmatrix} c & c_1 \\ a & a_1 \end{vmatrix},\quad c_2 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix}$$

und in ϑ, ϑ_1 ausgedrückt:

$$\left\{ \begin{aligned} &-\sqrt{m}\cdot\cos\frac{\vartheta+\vartheta_1}{2}\cdot x - \sqrt{n}\cdot\sin\frac{\vartheta+\vartheta_1}{2}\cdot y \\ &\qquad + \cos\frac{\vartheta-\vartheta_1}{2}\cdot z = \text{const.} \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung, in der ϑ willkürlich, ϑ_1 nach 9) davon abhängig ist, gibt bei Veränderung von ϑ alle diejenigen Ebenen, an, die den Kegel 4′) und die Hyperboloide 4) in gleichseitigen Hyperbeln schneiden. Diese Schnittebenen sind nicht für alle Werte von ϑ reell. Als Intervalle reeller Lösung gibt Hoppe an:

1) $m < n < 1$; ϑ beliebig

2) $1 > m > n$; ϑ beliebig

und für ϑ im ersten Quadranten:

3) $m < 1 < n$; $\vartheta < \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\dfrac{\frac{1}{m^2} - 1}{1 - \frac{1}{n^2}}}$

4) $m > 1 > n$; $\vartheta > \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\dfrac{1 - \frac{1}{m^2}}{\frac{1}{n^2} - 1}}$.

Bei der Kürze der von Hoppe gegebenen Darstellung, aus der man weder erfährt, wie Hoppe zu seiner Endgleichung gelangt, noch woraus er seine Intervalle reeller Lösung entnimmt, war es dem Verfasser leider nicht möglich, diese zu kontrollieren und

mit den von Schlömilch gefundenen und auf S. 58 wiedergegebenen, an die sie erinnern, zu vergleichen; umsoweniger, als es dem Verfasser nicht gelungen, die geometrische Bedeutung des Winkels ϑ zu ermitteln. Nur eins lässt sich ersehen:

Schreiben wir $m = \frac{c^2}{a^2}$, $n = \frac{c^2}{b^2}$, um die von Hoppe zugrunde gelegte Gleichung 4) auf die Form der Gleichung 1) bei Schlömilch zu bringen, so drücken sich obige Intervalle durch a, b, c folgendermassen aus:

1) $a > b > c$; ϑ beliebig
2) $b > a > c$; ϑ beliebig
3) $a > c > b$; $\operatorname{tg}^2\vartheta < \frac{a^4 - c^4}{c^4 - b^4}$
4) $b > c > b$; $\operatorname{tg}^2\vartheta > \frac{c^4 - a^4}{b^4 - c^4}$

Man erkennt hieraus wenigstens, dass bei Hoppe der Winkel ϑ in denselben Fällen einer Bedingung unterworfen ist, in denen bei Schlömilch die Grössenveränderlichkeit des Winkels ϑ einer Einschränkung unterliegt. Daraus endlich, dass Hoppe nur diese vier Möglichkeiten reeller Lösung angibt, geht hervor, dass in den Fällen

$$1 < m < n \text{ oder } c > a > b$$
$$\text{und } 1 < n < m \text{ oder } c > b > a$$

keine gleichs.-hyperbol. Schnitte möglich sind, was mit Schlömilchs Resultat übereinstimmt.

Bei beiden ist die Untersuchung der verschiedenen Möglichkeiten unvollständig, da diejenigen Fälle nicht berücksichtigt sind, in denen zwei der Halbachsen der gegebenen Hyperboloide bezw. Kegel, oder alle drei einander gleich werden. Da, wie die späteren Untersuchungen des Verfassers zeigen werden, gerade diese speziellen Fälle wichtige Ausnahmen von der

allgemeinen Regel bilden, so mögen sie schon hier im Anschluss an die von Schlömilch aufgestellte Gleichung

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = -\frac{(a^2+b^2)\,c^2}{b^2(a^2-c^2)\cos^2\psi + a^2(b^2-c^2)\sin^2\psi}$$

(vergl. S. 58) kurz behandelt werden.

1) $a > c = b$: $\operatorname{tg}^2\vartheta = \dfrac{(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)\cos^2\psi}$ liefert für alle Werte von ψ reelle Werte von ϑ, d. h. die Spuren der Tangentialebenen des Ortskegels in der xy-Ebene bilden einen vollen Strahlbüschel um O oder durch jede durch O gehende Gerade in der xy-Ebene gehen zwei Tangentialebenen des Ortskegels der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte, da obige Gleichung für jedes ψ zwei ϑ liefert; nur für $\psi = 90^0$ erhalten wir nur den einen Wert $\vartheta = 90^0$, d. h. zu den in gleichseitigen Hyperbeln schneidenden Ebenen gehört im besonderen die yz-Ebene.

2) $a = c > b$: $\operatorname{tg}^2\vartheta = \dfrac{a^2+b^2}{-(c^2-b^2)\sin^2\psi}$. Nur für $\psi = 0$ erhalten wir einen reellen Wert für ϑ, nämlich $\vartheta = 90^0$. Daraus folgt, dass nur die zx-Ebene und die zu ihr parallelen Ebenen gleichseitig-hyperbolische Schnitte liefern.

3) $c > a = b$: $\operatorname{tg}^2\vartheta = \dfrac{2a^2c^2}{-a^2(c^2-a^2)(\cos^2\psi+\sin^2\psi)}$

$= -\dfrac{2c^2}{c^2-a^2}$; da diese Gleichung keinen reellen Wert für ϑ liefert, so können die gegebenen Flächen in diesem Falle nie in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten werden, was also stets unmöglich ist, wenn c die grösste Halbachse ist.

4) $a = b = c$: $\operatorname{tg}^2 \vartheta = \infty$ ganz unabhängig von ψ, d. h. da wir für alle Werte von ψ: $\vartheta = 90^0$ erhalten, dass alle Tangentialebenen unseres Kegels der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte auf der xy-Ebene senkrecht stehen. Da sie ferner alle durch O als den Scheitel des Kegels gehen, so degeneriert dieser im Falle $a = b = c$ in den Ebenenbüschel durch die z-Achse.

Nach dieser Zwischenbemerkung kehren wir zurück zu den weiteren Ausführungen von Hoppe.

III.

Für den Fall des *einschaligen Hyperboloids* ist $m > 0$, $n < 0$ anzunehmen und

$$10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{m} = m'; \ \frac{n}{m} = -n'; \ \mu = -m\mu' \\ x = z'; \ y = y'; \ z = x' \end{array} \right.$$

zu setzen. Dadurch geht 4) über in

$$-m'x'^2 - n'y'^2 + z'^2 = \mu'$$

bei positivem m' und n'. Dann haben wir formell dieselben Voraussetzungen wie vorher bei der Untersuchung des zweischaligen Hyperboloides, können daher die gefundenen Formeln auf die Gleichungen 9) anwenden und mit Hülfe der umgekehrten Substitutionen 10) auf die anfängliche Beziehung zurückkehren.

IV.

Nachdem hiermit die beiden Hyperboloide und der reelle Kegel 2. Grades (als Asymptotenkegel derselben) erledigt sind, bleibt von eigentlichen Flächen 2. Grades, da das Ellipsoid und das elliptische Paraboloid keine hyperbolischen Schnitte zulassen, nur noch das *hyberbolische Paraboloid* zu untersuchen.

Seine Gleichuug sei

$$11) \qquad -mx^2 + ny^2 + 2\nu z = 0.$$

Bei Variation von ν stellt diese Gleichung eine Schar ähnlicher Paraboloide dar und für $\nu = 0$ das Ebenenpaar

$$11') \qquad x = \pm y \sqrt{\frac{n}{m}},$$

welches als Ausartung des hyperbol. Paraboloides aufzufassen ist. „Parallele Ebenen schneiden jene ähnlichen Paraboloide in ähnlichen Hyperbeln und jenes Ebenenpaar in dem gemeinsamen Asymptotenpaar; alle Schnittpunkte sind gleichseitige Hyperbeln, wenn ein Asymptotenpaar einen rechten Winkel bildet." Die Aufgabe: „Das gegebene Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel zu schneiden" reduziert sich demnach auf die andere: „Auf zwei gegebene Ebenen die Schenkel eines rechten Winkels zu legen."

Irgendeine durch O gehende Gerade der ersten Ebene habe die Gleichung

$$12) \qquad \frac{x}{\sqrt{n}} = \frac{y}{\sqrt{m}} = \frac{z}{p},$$

eine ebenfalls durch O gehende Gerade der zweiten Ebene sei gegeben durch

$$13) \qquad \frac{x}{\sqrt{n}} = -\frac{y}{\sqrt{m}} = \frac{z}{q},$$

beide als Durchschnitt der gegebenen Ebenen

$$\frac{x}{\sqrt{n}} = \frac{y}{\sqrt{m}}, \text{ bezw. } \frac{x}{\sqrt{n}} = -\frac{y}{\sqrt{m}}$$

mit je einer anderen Ebene betrachtet.

Die Richtungskosinus beider Geraden sind $\sqrt{n}$, $\sqrt{m}$, p bezw. $\sqrt{n}$, $-\sqrt{m}$, q; sie stehen zu einander senkrecht, wenn

$$n - m + pq = 0$$

ist. In der Gleichung des zweiten Schenkels ist daher

$q = \frac{m-n}{p}$ zu setzen, wenn er mit dem ersten einen rechten Winkel bilden soll: dann lautet sie

$$13') \qquad \frac{x}{\sqrt{n}} = -\frac{y}{\sqrt{m}} = \frac{pz}{m-n}.$$

Die durch diese beiden Geraden hindurchgehende Ebene und alle ihr parallelen schneiden das Paraboloid in gleichseitigen Hyperbeln. Als Gleichung aller dieser Ebenen findet Hoppe:

$$14) \quad \sqrt{m}\left(p + \frac{m-n}{p}\right) \cdot x + \sqrt{n}\left(p - \frac{m-n}{p}\right) \cdot y - 2\sqrt{m \cdot n} \cdot z = \pi$$

für variables p und π.

Im Gegensatz zu Schlömilch, der die Gleichung der von den hyperzyklischen Ebenen umhüllten Fläche aufstellt, begnügt sich Hoppe damit, die Gleichung dieser Ebenen selbst für die verschiedenen Flächen 2. Grades aufzustellen. Die Behandlung des hyperbol. Zylinders vermissen wir auch hier.

Als völlig neu hervorzuheben ist Hoppes Verfahren bei Untersuchung der gleichs.-hyperbolischen Schnitte des hyperbol. Paraboloides, welches sich darauf gründet, dass zu jeder Schar ähnlicher hyperbolischer Paraboloide als Spezialfall ein in ein Ebenenpaar zerfallendes gehört. Dieses Ebenenpaar ist, beiläufig bemerkt, identisch mit den gemeinsamen Richtebenen aller Paraboloide der Schar. Dieses Verfahren ist genau analog dem von Hoppe bei Untersuchung der Hyperboloide angewendeten, wo nach den rechtwinkligen Schnitten des gemeinsamen Asymptotenkegels der Schar gefragt wurde, doch war es für die Hyperboloide schon angedeutet durch Schröter, vergl. S. 26. Überhaupt ist die grössere Allgemeinheit der Hoppeschen Ausfüh-

rungen gegenüber den früheren zu betonen, da Hoppe die ganze Schar ähnlicher Hyperboloide, bezw. Paraboloide zugleich erledigt durch die Erkenntnis, dass alle Flächen einer solchen Schar von parallelen Ebenen in ähnlichen Kurven geschnitten werden.

§ 7.

Das ganz allgemeine Problem, eine Fläche 2. Grades in einem der Gestalt und Grösse nach gegebenen Kegelschnitte zu schneiden, stellt sich **M. Krewer** in einem im Jahre 1894 im Archiv für Math. u. Physik erschienenen Aufsatze[1]). Seine Untersuchungen zeigen, soweit sie sich auf die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte beziehen, in ihrem Ausgangspunkte einige Verwandtschaft mit den beiden oben besprochenen, schlagen jedoch in ihrem weiteren Verlaufe einen ganz eigentümlichen Weg ein, indem Krewer zu zwei Bedingungsgleichungen für die fraglichen Schnitte gelangt, die zusammen eine ebene Kurve 3. Ordnung darstellen, auf deren Untersuchung dann die weitere Diskussion des Problems zurückgeführt wird. Für die Rotationsflächen zerfällt jene Kurve in drei Gerade. Das Paraboloid nimmt eine Ausnahmestellung ein, indem sich für dieses eine Kurve höherer Ordnung ergibt.

Die Untersuchung erstreckt sich auf die fünf eigentlichen Flächen 2. Ordnung und den reellen Kegel 2. Grades, während die zerfallenden Flächen 2. Grades von der Betrachtung ausgeschlossen sind. Von den eigentlichen Flächen 2. Grades werden das Ellipsoid und die beiden Hyperboloide gemeinschaft-

[1]) M. Krewer, „Über das Problem, eine Fläche 2. Grades in einem der Gestalt und Grösse nach gegebenen Kegelschnitte zu schneiden", Archiv für Math. u. Physik 12 (1894), S. 185 ff.

lich behandelt, ebenso die beiden Paraboloide, wobei sich jedoch bald herausstellt, dass das Ellipsoid und das elliptische Paraboloid gleichseitige Hyperbelschnitte nicht zulassen.

Ia.

Als gemeinsame Gleichung des *Ellipsoides, des einschaligen und des zweischaligen Hyperboloides* nimmt Krewer die Gleichung:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$$

an, als Gleichung der schneidenden Ebene in allen Fällen die Normalform:

$$ux + vy + wz - p = 0;\ u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

Um die Gleichung der Schnittkurve zu erhalten, transformiert er ähnlich wie Schlömilch (S. 56) die Gleichung der gegebenen Fläche auf ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem $O'/\xi\eta\zeta$ mit $x_0 = pu$, $y_0 = pv$, $z_0 = pw$ als Koordinaten von O' und u, v, w als Richtungskosinus der ζ-Achse und setzt dann $\zeta = 0$; denn da die Koordinaten von O in bezug auf O/xyz der Gleichung der gegebenen Ebene genügen, und die Richtungskosinus der ζ-Achse mit denen der Ebenennormale übereinstimmen, so ist die $\xi\eta$-Ebene des neuen Systems mit unserer Schnittebene identisch; diese hat also im neuen System die Gleichung $\zeta = 0$, so dass man durch Einsetzen dieses Wertes in die transformierte Flächengleichung die Gleichung des Schnittes bekommt. Die ζ-Achse des neuen Systems geht dabei durch den Punkt O hindurch. O' ist also der Fusspunkt des Lotes von O auf die Schnittebene, wie die vom Verfasser hinzugefügte Figur 2 zeigt. In der Figur sind den Koordinatenachsen beider Systeme ihre Richtungskosinus in bezug auf das jedesmal andere System hinzugefügt, wie sie sich aus den Transformationsformeln ergeben.

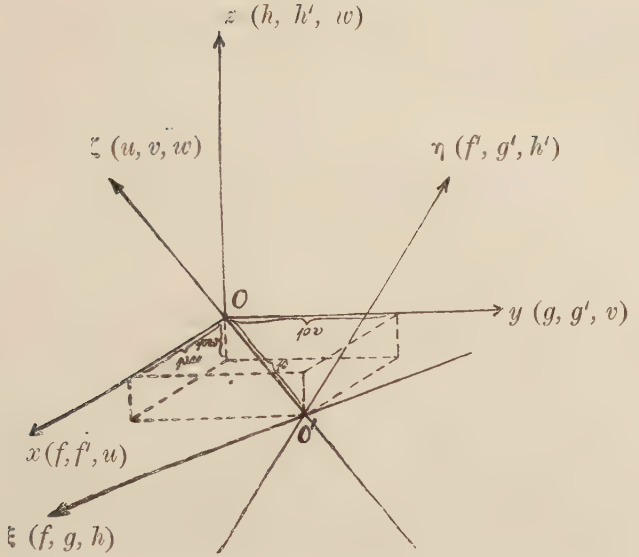


Fig. 2.

Diese lauten:

$$\begin{cases} x = pu + f\xi + f'\eta + f''\zeta \\ y = pv + g\xi + g'\eta + g''\zeta \\ z = pw + h\xi + h'\eta + h''\zeta \end{cases}$$

mit $f'' = u,\ g'' = v,\ h'' = w.$

Die auf die angegebene Weise ermittelte Gleichung der Schnittkurve hat die Form:

$$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\xi\eta + 2\mathfrak{D}\xi + 2\mathfrak{E}\eta + \mathfrak{F} = 0,$$

wo

$$\mathfrak{A} = af^2 + bg^2 + ch^2$$
$$\mathfrak{B} = af'^2 + bg'^2 + ch'^2$$
$$\mathfrak{C} = aff' + bgg' + chh' \text{ usw.}$$

Diese Schnittkurve ist ein Kegelschnitt. Soll dieser Kegelschnitt ein bestimmter, z. B. eine gleichseitige Hyperbel sein, so müssen seine Achsen A und B, also auch die Ausdrücke $\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}$ und $\frac{1}{A^2} \cdot \frac{1}{B^2}$ feste

Werte haben. Für gleichs.-hyperbol. Schnitte insbesondere muss

$$\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}=0,\quad \frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{B^2}=-\frac{1}{A^4}$$

sein. In den Koeffizienten unserer allgemeinen Kegelschnittgleichung ausgedrückt heisst das:

$$\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}=\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{C}^2)}{\delta}=\frac{U\cdot V}{W}=0$$

$$\text{und}\quad \frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{B^2}=\frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{C}^2)^3}{\delta^2}=\frac{V^3}{W^2}=-\frac{1}{A^4};$$

wenn man zur Abkürzung schreibt:

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=a(v^2+w^2)+b(u^2+w^2)+c(u^2+v^2)=U$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{C}^2=\quad bcu^2\quad+\quad acv^2\quad+\quad abw^2\quad=V$$
$$\delta=-\begin{vmatrix}\mathfrak{A} & \mathfrak{C} & \mathfrak{D}\\ \mathfrak{C} & \mathfrak{B} & \mathfrak{E}\\ \mathfrak{D} & \mathfrak{E} & \mathfrak{F}\end{vmatrix}=-p^2abc+bcu^2+acv^2+abw^2=W.$$

Dabei sind die Relationen

$$u=gh'-hg',\ v=hf'-fh',\ w=fg'-gf';$$
$$f^2+f'^2=1-u^2=v^2+w^2,\ g^2+g'^2=1-v^2=u^2+w^2,$$
$$h^2+h'^2=1-w^2=u^2+v^2,$$

die sich daraus ergeben, dass f, g, h; f', g' h'; u, v, w die Richtungskosinus dreier aufeinander senkrecht stehender Geraden sind, bereits berücksichtigt.

Wir haben also im letzten Grunde *zwei Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten* u, v, w, p der Gleichung unserer Schnittebene, falls diese die gegebene Fläche

$$ax^2+by^2+cz^2-1=0$$

in einer gleichseitigen Hyperbel schneiden soll.

Die erste derselben verlangt, dass entweder $U=0$ oder $V=0$ ist. Schreibt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}=R=\frac{UV}{W}$$

und bildet den Ausdruck

$$\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}\right)^2 : \left(\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{B^2}\right)=\left(\frac{B}{A}+\frac{A}{B}\right)^2=S \quad [=R^2 . A^2B^2],$$

welcher in den Koeffizienten unserer Kegelschnittgleichung

$$S=\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{C}^2}=\frac{U^2}{V}$$

lautet, so muss für $R=0$ auch $S=0$ sein, d. h. die Gleichungen

$$RW-UV=0 \text{ und } SV-U^2=0$$

müssen für $R=S=0$ gleichzeitig erfüllt sein, was nur der Fall ist für $U=0$.

Demnach vereinfacht sich die *erste Bedingung* zu

$$\underline{U=a(v^2+w^2)+b(u^2+w^2)+c(u^2+v^2)}$$
$$\underline{=u^2(b+c)+v^2(a+c)+w^2(a+b)=0,}$$

was mit der Bedingungsgleichung 2), S. 136 des Verfassers für die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der Hyperboloide und des Kegels übereinstimmt, wenn man, um dieselbe Gleichungsform der gegebenen Flächen herzustellen, die Substitutionen macht:

$$a=\frac{1}{a^2},\ b=\frac{1}{b^2},\ c=-\frac{1}{c^2}$$

und für die Koeffizienten der Ebenen:

$$u=\alpha,\ v=\beta,\ w=\gamma\ [p=\delta].$$

Die *zweite Bedingungsgleichung,* welche ausdrückt, dass die Achse A der gleichseitigen Hyperbel einen bestimmten Wert hat, schreibt Krewer in der Form:

$$\underline{\left(\frac{V}{p^2}\right)^3=-\frac{1}{A^4}\left(\frac{W}{p^2}\right)^2\cdot\frac{T}{p^2},}$$

wobei T eine Abkürzung für $u^2+v^2+w^2=1$ ist. Handelt es sich nur um gleichseitig-hyperbolische Schnitte überhaupt, nicht um solche von bestimmter Achsengrösse, so ist natürlich A in dieser Gleichung als variabel zu betrachten.

Durch die Substitutionen $\frac{u^2}{p^2}=x$, $\frac{v^2}{p^2}=y$, $\frac{w^2}{p^2}=z$ gehen diese beiden Bedingungsgleichungen über in:

1) $(b+c)\,x+(a+c)\,y+(a+b)\,z=0,$

2) $$(bcx+acy+abz)^3 + \frac{1}{A^4}(bcx+acy+abz-abc)^2\,(x+y+z)=0.$$

Aus Gleichung 1) erkennt man, dass das Ellipsoid ($a>0$, $b>0$, $c>0$), wie auch das zweischalige Hyperboloid (z. B. $a<0$, $b<0$, $c>0$), wenn die reelle Achse (im Beispiel die z-Achse) die grösste ist, nicht in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten werden können. Dasselbe hätte Krewer natürlich auch für das einschalige Hyperboloid (z. B. $a>0$, $b>0$, $c<0$), dessen innere Achse (z-Achse) die grösste ist, folgern können. Vergl. S. 41.

Die beiden Gleichungen *1) und 2) stellen gemeinsam eine ebene Kurve 3. Ordnung dar* als Schnitt einer Ebene mit einer Fläche 3. Ordnung. Krewer erhält die Schnittkurve selbst ähnlich wie oben, indem er die Fläche 2) auf ein neues Koordinatensystem transformiert, dessen $\xi\eta$-Ebene die Ebene 1) ist, und dann $\zeta=0$ setzt. Die Transformationsformeln lauten bei anderen Werten f, g, h usw. als vorhin:

$$\left\{\begin{aligned} x &= f\xi + f'\eta + f''\zeta \\ y &= g\xi + g'\eta + g''\zeta \\ z &= h\xi + h'\eta + h''\zeta, \end{aligned}\right.$$

wo

$$f''=q\,(b+c),\quad g''=q\,(a+c),\quad h''=q\,(a+b),$$

$$q=\frac{1}{\sqrt{(b+c)^2+(a+c)^2+(a+b)^2}},$$

und *die Gleichung der gesuchten Kurve 3. Ordnung:*

$$x_1^3+\frac{1}{A^4}x_2^2\cdot x_3=0,$$

wobei x_1, x_2, x_3 Abkürzungen für folgende Werte sind:

$x_1 = (bcf + acg + abh)\,\xi + (bcf' + acg' + abh')\,\eta$
$x_2 = (bcf + acg + abh)\,\xi + (bcf' + acg' + abh')\,\eta - abc$
$x_3 = (f + g + h)\,\xi + (f' + g' + h')\,\eta,$

welche sich höchstens um Konstante als Faktoren von homogenen Koordinaten unterscheiden.

Auf die nähere Untersuchung dieser Kurve ist hiermit das Problem der gleichs.-hyperbol. Schnitte zurückgeführt.

Wir übergehen jedoch Krewers diesbezügliche Ausführungen und begnügen uns damit, zu erwähnen, dass jene Kurve eine sogenannte Unikursalkurve ist, die einen Rückkehrpunkt im Unendlichen besitzt und aus zwei Zweigen besteht.

Ib.

Für die *Rotationsflächen*

$$ax^2 + b(y^2 + z^2) = 1$$

gehen die Gleichungen 1) und 2) über in:

1) $$2bx + (a + b)(y + z) = 0,$$

2) $$\{b^2x + ab(y + z)\}^3 + \frac{1}{A^4}\{b^2x + ab(y + z) - ab^2\}^2 (x + y + z) = 0.$$

Setzt man den aus 1) berechneten Wert:

$$y + z = -\frac{2b}{a + b} \cdot x$$

in 2) ein, so erhält man eine kubische Gleichung für x, deren eine Wurzel $x = 0$ ist. Bezeichnet man die beiden andern Wurzeln mit α, bzw. β, so sind beide Gleichungen 1) und 2) gleichzeitig erfüllt für

I. $x = 0,\ y + z = 0$

II. $x = \alpha,\ y + z = -\frac{2b}{a + b} \cdot \alpha$

III. $x = \beta,\ y + z = -\frac{2b}{a + b} \cdot \beta,$

d. h. die ebene Kurve dritter Ordnung *zerfällt für die Rotationsflächen in die drei durch die Gleichungspaare I, II, III dargestellten Geraden.*

IIa.

Für den Fall des *Kegels:*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

wird

$$\delta = -p^2abc,$$

und die Bedingungsgleichungen lauten daher:

1) $(b + c)\,x + (a + c)\,y + (a + b)\,z = 0,$

2) $$(bcx + acy + abz)^3 + \frac{1}{A^4}\,a^2\,b^2\,c^2\,(x + y + z) = 0.$$

1) lässt wieder erkennen, dass ein Kegel nur dann in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten werden kann, wenn die reelle Achse desselben nicht die grösste ist.

Der Durchschnitt der Fläche 2) mit der Ebene 1) hat die Gleichung:

$$x_1^3 + \frac{a^2\,b^2\,c^2}{A^4}\,x_3 = 0,$$

worin x_1 und x_3 dieselbe Bedeutung haben wie im Falle I x_1 und x_3. Die Bedingung führt also auch hier auf eine *Kurve 3. O.*

IIb.

Ist der Kegel ein *Rotationskegel*, etwa

$$ax^2 + b\,(y^2 + z^2) = 0,$$

so nimmt 1) dieselbe Form an wie bei den Rotationshyperboloiden. Die zweite Bedingungsgleichung geht, wenn man

$$x + z = -\frac{2\,b}{a + b}\,x = \mu x$$

aus der ersten in sie einsetzt, über in:

$$(b^2x + \mu abx)^3 + \frac{a^2\,b^2\,c^2}{A^4}\,(x + \mu x) = 0.$$

Eine der drei Wurzeln dieser kubischen Gleichung ist

$$x = 0, \; [y + z = 0].$$

Nach ihrer Ausscheidung bleibt eine rein quadratische Gleichung zurück, deren Wurzeln unbedingt reell sind; bezeichnen wir sie mit α^2 und $-\alpha^2$, so liefern unsere beiden Bedingungsgleichungen für den Rotationskegel die *drei Geraden:*

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad x = 0, \; y + z = 0 \\ &\text{II.} \quad x = \alpha^2, \; y + z = \mu\alpha^2 \\ &\text{III.} \quad x = -\alpha^2, \; y + z = -\mu\alpha^2. \end{aligned}$$

Dabei ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass unser Rotationskegel überhaupt gleichs.-hyperbol. Schnitte zulässt.

$$\begin{aligned} &0 < \mu < 1, \\ \text{d. h.} \quad &b < 0, \; |b| < |a|. \end{aligned}$$

Schreibt man $a = \frac{1}{a'^2}$, $b = -\frac{1}{b'^2}$, so sind a' und b' die Achsen des Kegels und es muss $b' > a'$, also die reelle Achse auch hier die kleinere sein.

III.

Auf dieselbe Weise wie unter I erhält Krewer für die *Paraboloide*

$$ax^2 + by^2 - 2z = 0$$

als Bedingungsgleichungen für gleichs.-hyperbol. Schnitte:

$$U_1 = a(v^2 + w^2) + b(u^2 + w^2) = 0$$

und

$$-\frac{1}{A^4} = \frac{a^3 b^3 w^6}{(-2abw + av^2 + bu^2)^2 (u^2 + v^2 + w^2)},$$

da in diesem Falle $V = abw^2$, $W = \delta = -2abw + av^2 + bw^2$ ist.

Durch die Substitutionen $\frac{u}{p} = x$, $\frac{v}{p} = y$, $\frac{w}{p} = z$ gehen diese beiden Gleichungen über in:

$$bx^2 + ay^2 + (a + b)\, z^2 = 0,$$

$$a^3 b^3 A^4 z^6 + (bx^2 + ay^2 - 2\,abz)^2 (x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Beide Gleichungen werden erfüllt durch $x = y = z = 0$. Setzt man in der zweiten mit Rücksicht auf die erste

$$bx^2 + ay^2 = -(a + b)\, z^2$$

und lässt den Faktor z^2 der ganzen Gleichung fort, so erhält man

1) $$bx^2 + ay^2 + (a + b)\, z^2 = 0$$

2) $$a^3 b^3 A^4 z^4 + \{(a + b)\, z + 2\,ab\}^2 (x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Die Gleichung 1) stellt einen Kegel dar. Es darf nicht a und b zugleich positiv sein, wenn derselbe reell sein soll, d. h. nur das hyperbol. Paraboloid lässt gleichseitige Hyperbelschnitte zu.

Beide Gleichungen gemeinsam repräsentieren eine *Raumkurve höherer Ordnung,* die Krewer unter Einführung von Polarkoordinaten weiter untersucht.

Es ist unschwer zu erkennen, dass die erste der obigen Bedingungsgleichungen in ihrer ursprünglichen Form

$$U_1 = a\,(v^2 + w^2) + b\,(u^2 + w^2) = bu^2 + av^2 + (a + b)\, w^2 = 0$$

der Gleichung 4) des Verfassers, vergl. S. 136, vollkommen äquivalent ist. Macht man nämlich die Substitutionen

$$x = z',\ y = y',\ z = x';$$

$$a = -\frac{1}{c'^2},\ b = \frac{1}{b'^2};\ u = \gamma,\ v = \beta,\ w = \alpha,\ p = \delta,$$

so geht die Gleichung des Paraboloides $ax^2 + by^2 - 2z = 0$ über in

$$\frac{y'^2}{b'^2} - \frac{z'^2}{c'^2} - 2x' = 0,$$

die der Ebene $ux + vy + wz - p = 0$ in

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' - \delta = 0,$$

und die Gleichung $U_1 = 0$ wird zu:

$$\left(\frac{1}{b'^2} - \frac{1}{c'^2}\right) \cdot \alpha^2 - \frac{1}{c'^2} \cdot \beta^2 + \frac{1}{b'^2} \gamma^2 = 0$$

oder

$$(b'^2 - c'^2)\, \alpha^2 + b'^2\, \beta^2 - c'^2\, \gamma^2 = 0.$$

Anhang.

Im Anschluss an die genannten ist noch eine ziemlich umfangreiche Arbeit von **Gillet** über die hyperzyklischen Ebenen von Oberflächen 2. O. zu erwähnen, über die jedoch der Verfasser nichts weiter ermitteln konnte, als dass sie sich gleich den vorigen der analytisch-geometrischen Untersuchungsmethode bedient, vergl. Jahrb. über die Fortschr. d. Math., Bd. XXIV.

Der Titel der Arbeit ist:

Gillet, Théorie des plans hypercycliques des surfaces du second ordre, Mathésis (2) II, (1892), S. 153—157; 180—191; 223—225.

III. Kapitel.

Elementar-geometrische Bearbeitung des Problems.

§ 8.

Am Schluss unserer Besprechung der Literatur der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte erübrigt es noch, auf eine *elementar-geometrische* Untersuchung über die auf einem gegebenen Kegel gelegenen gleichseitigen Hyperbeln einzugehen, welche **G. D. E. Weyer** im Jahre 1896 im Archiv für Math. 14, S. 139 ff mitteilte unter der Überschrift: „Elementare Bestimmung der Lage der gleichseitigen Hyperbel im Kegel." Der elementare Charakter der Weyerschen Ausführungen bedingt eine völlige Verschiedenheit derselben von allen bisher behandelten Arbeiten über denselben Gegenstand, nicht nur im Verfahren, sondern auch in der Bezeichnungsweise. Um von vornherein Missverständnissen vorzubeugen, erscheint es daher zweckmässig, die Hauptunterschiede in der Ausdrucksweise Weyers gegenüber der in der analytischen Geometrie des Raumes üblichen im voraus hervorzuheben. Dieselben betreffen die drei Ausdrücke „Kegelachse", „Achsenschnitt" und „Winkel an der Spitze".

1.

In der Bezeichnungsweise der analytischen Raumgeometrie ist die „reelle Hauptachse des Kegels" gleichzeitig eine Symmetrieachse desselben. Ein senkrecht zu ihr geführter ebener Schnitt liefert im all-

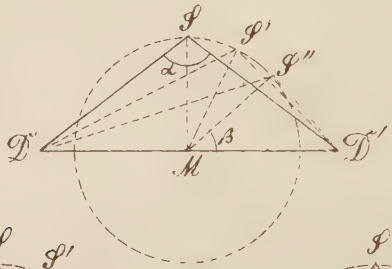
gemeinen eine Ellipse, beim Rotationskegel einen Kreis. Als „Achsenschnitt" des Kegels bezeichnet man jeden diese reelle Hauptachse enthaltenden ebenen Schnitt. Die beiden Achsenschnitte durch die Hauptachsen der erwähnten Ellipse kann man zweckmässig als „Haupt-Achsenschnitte" bezeichnen. Als „Winkel an der Spitze" gilt dann jeder in einem Achsenschnitt gelegene Winkel, dessen Scheitelpunkt die Kegelspitze ist, und dessen Schenkel von zwei Kegelseiten gebildet werden. Statt „Winkel an der Spitze" kann man auch „Öffnungswinkel" oder „Öffnungsweite des Kegels", auch Kegelöffnung, sagen und kann die Öffnungsweiten in den beiden Haupt-Achsenschnitten als „Hauptöffnungsweiten" bezeichnen. Ausser beim Rotationskegel sind die Öffnungsweiten in den verschiedenen Achsenschnitten natürlich verschieden gross; ihren grössten und kleinsten Wert weisen sie in den Haupt-Achsenschnitten auf.

2.

In der Sprechweise der Elementargeometrie dagegen, deren Weyer sich bedient, versteht man unter der „Kegelachse" die Verbindungslinie der Kegelspitze mit dem Mittelpunkte eines Kreisschnittes, des „Grundkreises". Je nachdem diese Achse auf dem Grundkreis senkrecht steht oder nicht, spricht man von einem „geraden" oder „schiefen" (Kreis-)Kegel. Der erstere ist gleichbedeutend mit dem Rotationskegel der analytischen Geometrie, der „schiefe" Kegel mit dem allgemeinen (elliptischen) Kegel 2. Grades. Auch der Achsenschnitt ist daher hier wohl zu unterscheiden von dem oben besprochenen. „Winkel an der Spitze" endlich ist jeder in einem Achsendreieck an der Kegelspitze gelegene Winkel. Dieser „Winkel an der Spitze" im Sinne Weyers behält für denselben Kegel in allen Achsenschnitten seinen Charakter bei, d. h. ist er einmal ein stumpfer, so ist er es immer;

ebenso wenn er einmal ein spitzer, und auch, wenn er einmal ein rechter ist. Jedoch unterliegt seine Grösse in den beiden ersten Fällen einer beschränkten Veränderlichkeit. Der Beweis hierfür ist einfach:

Fig. 3.



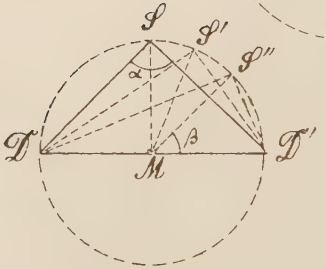


Fig. 4.

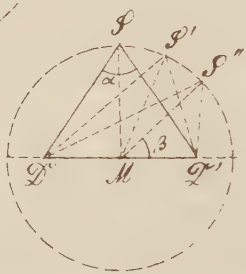


Fig. 5.

In den drei Figuren 3, 4, 5 sei jedesmal DD′ ein Durchmesser des Grundkreises, M sein Mittelpunkt und SM die Entfernung des letzteren von der Kegelspitze, welche natürlich in allen Achsenschnitten desselben Kegels dieselbe Grösse hat. Dann stellen die Dreiecke DSD′, DS′D′, DS″D′ verschiedene Achsendreiecke der drei Kegel dar und die entsprechenden Winkel die „Winkel an der Spitze". Für jeden der drei verschiedenen Kegel erhält man alle denkbaren Achsendreiecke, wenn man, wie in den Figuren geschehen, mit MS um M einen Halbkreis schlägt und die Punkte seiner Peripherie mit D und D′ verbindet. Nun ist schon aus der blossen Betrachtung der Figuren einleuchtend, dass, wenn in einem der Kegel einer der Winkel an der Spitze, etwa α, ein stumpfer,

rechter oder spitzer ist, dasselbe für alle übrigen gilt. Doch zeigen in Fig. 3 und Fig. 5 die Winkel DSD', DS'D' und DS''D' noch verschiedene Grössen, und zwar liegt α im Falle der Fig. 3 zwischen $\angle$ DSD' und 180°, im Falle der Fig. 5 zwischen $\angle$ DSD' und 0°. Demnach hat α in S im ersten Falle den grössten, im zweiten Falle den kleinsten Wert. Jedoch unterliegt die Beweglichkeit von S in beiden Fällen der Beschränkung, dass der kleinste Winkel — in den Figuren $\angle$ D'MS'' = β —, den der nach S führende Radius mit dem Durchmesser DD' des Grundkreises in einem der Achsenschnitte *wirklich* bildet, der Neigungswinkel der Kegelachse gegen die Grundkreisebene ist. Er liegt in derjenigen Ebene, durch welche die Kegelachse auf die Grundfläche senkrecht projiziert wird. In ihr hat demnach der Winkel an der Spitze beim stumpfen Kegel den grössten, beim spitzen dagegen den kleinsten Wert. Diese Ebene steht senkrecht auf dem im vorigen hervorgehobenen ausgezeichneten Achsenschnitt des kleinsten bezw. grössten Winkels DSD' = α.

Von diesen beiden besonderen Achsenschnitten im Sinne der Elementargeometrie ist nur der eine, welcher auf der Grundkreisebene senkrecht steht, gleichzeitig ein Achsenschnitt im Sinne der analytischen Raumgeometrie, u. zw. der Hauptschnitt der kleinsten Öffnungsweite.

Endlich sei noch darauf hingewiesen, dass im Falle des Kegels 5 unter den Achsenschnitten im analytisch-geometrischen Sinne ausser den spitzwinkligen auch rechtwinklige und stumpfwinklige vorkommen können; beim Kegel 4 sind spitzwinklige Achsenschnitte ausgeschlossen, weil die kleinste Öffnungsweite nach dem vorigen 90° beträgt, dagegen sind Öffnungsweiten von mehr als 90°, d. h. stumpfe Winkel, möglich. Der Kegel 3 lässt auch im Sinne der analytischen Geometrie nur stumpfwinklige Achsenschnitte zu.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir zur Darstellung des Gedankenganges von Weyers Untersuchungen über:

Gegeben sei ein gerader oder schiefer Kegel, dessen kreisförmige Grundfläche den Durchmesser $2a'$ und die Gleichung

$$y^2 = x'(2a' - x')$$

haben möge. Ein gleichs.-hyperbol. Schnitt dieses Kegels habe die Gleichung

$$y^2 = x(2a + x).$$

Zur Erläuterung sei hinzugefügt, dass die beiden Koordinatensysteme in den Ebenen des Kreises bezw. der gleichseitigen Hyperbel, auf welche die Gleichungen dieser Kegelschnitte sich beziehen, so gewählt sind, dass ihre y-Achsen einander parallel sind, nämlich beide parallel der Durchschnittsgeraden der beiden Ebenen. Die x'-Achse und die x-Achse stehen in den bezüglichen Ebenen auf der Mitte dieser Durchschnittsgeraden senkrecht, so dass die durch diese beiden Achsen bestimmte Ebene auf beiden Kegelschnittebenen gleichzeitig senkrecht steht. Der Winkel der x-Achse gegen die x'-Achse ist daher zugleich der Neigungswinkel des gleichs.-hyperbol. Schnittes gegen die Kreisebene.

Aus den Gleichungen folgt nun, dass für alle solche Punkte der beiden Kegelschnitte, welche gleiche Ordinaten haben, d. h. derselben auf den y-Achsen senkrechten Ebene angehören, zwischen ihren Abszissen und den Achsen $2a$ und $2a'$ der Kegelschnitte die Beziehung besteht:

$$x(2a + x) = x'(2a' - x').$$

Ist α der Winkel an der Spitze des Kegels[1]), ν der Winkel der einen Kegelseite des Achsendreiecks

[1]) Wie wir gesehen, hat dieser Winkel α in den verschiedenen Achsenschnitten im elementar-geom. Sinne verchiedene Werte, falls er nicht gerade 90° beträgt. Der bestimmte Wert α gilt

gegen die Grundfläche, d. h. gegen die x'-Achse, u der Winkel derselben Kegelseite gegen die x-Achse, der dritte Winkel des Achsendreiecks also $180^0 - (\alpha + v)$, so folgt aus der letzten Gleichung und der Figur mit Hülfe des Sinussatzes:

$$\frac{x}{x'} = \frac{\sin v}{\sin u} = \frac{2a' - x'}{2a + x} = \frac{\sin(\alpha - u)}{\sin(\alpha + v)}.$$

Vergl. Figur 6. (Die Figur entspricht dem Falle: $\alpha = 90^0$, $v = 33^0$, für den entweder $u = v = 33^0$ oder $u = 90^0 - v = 57^0$ ist).

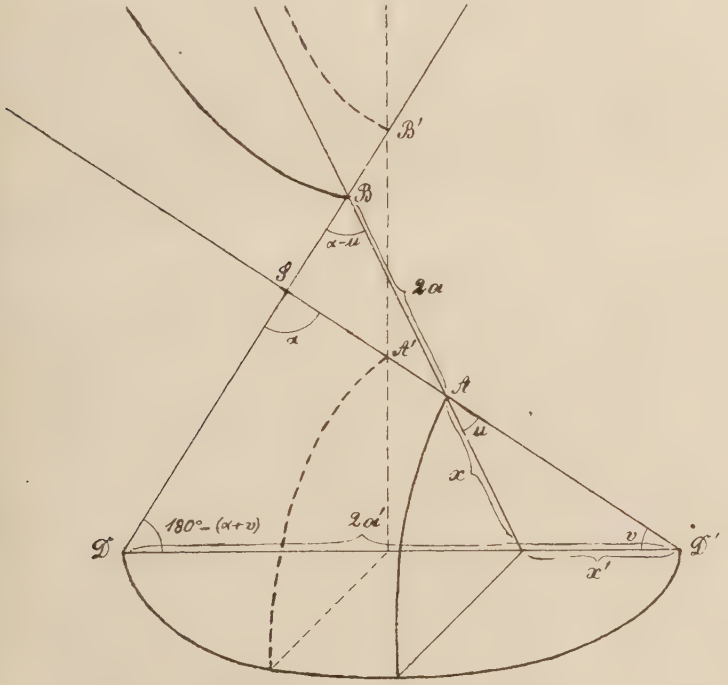


Fig. 6.

demnach nur für den durch die beiden Abszissenachsen bestimmten Schnitt. Dass dieser bei den gemachten Voraussetzungen ein Achsenschnitt im Sinne Weyers ist, trifft zwar zu, hätte aber bewiesen werden müssen.

Sind α und v gegeben, so ist u demnach zu berechnen aus:

$$\sin v \cdot \sin(\alpha + v) = \sin u \cdot \sin(\alpha - u).$$

Durch goniometrische Umformungen dieser Gleichung kommt man auf eine in $\sin^2 u$ quadratische Gleichung, deren Auflösung lautet:

$$\sin^2 u = \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha - \sin v \cdot \sin(\alpha + v) \cdot \cos\alpha + \sqrt{[\tfrac{1}{2}\sin^2\alpha - \sin v \cdot \sin(\alpha + v) \cdot \cos\alpha]^2 - \sin^2 v \cdot \sin^2(\alpha + v)}.$$

Reelle Lösungen erhält man nach Weyer nur für $\cos\alpha < 0$, da sonst der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen angeblich negativ wird[1]), d. h. damit

[1]) Wie wir gleich beweisen werden, ist der von Weyer betrachtete Achsenschnitt DSD' unbedingt der Hauptschnitt der kleinsten Öffnungsweite des Kegels. Diese beträgt für den Kegel $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ weniger als 90° in den vier Fällen $a > c > b$ und $c > a \geq b$, wenn man $a > b$ voraussetzt, was keine Beschränkung bedeutet, vergl. S. 145, 147, 150. In den beiden letzten Fällen sind gleichs.-hyperbol. Schnitte allerdings ausgeschlossen, vergl. S. 145. In den beiden ersten Fällen dagegen sind sie nicht allein möglich, sondern unter ihnen befinden sich auch notwendig zwei, resp. einer, der, durch die Kegelspitze gehend, auf dem betrachteten Hauptschnitt DSD' senkrecht steht. Für den schiefen Kegel müsste obige Gleichung also auch für $a < 90°$, $\cos\alpha > 0$ unter Umständen reelle Werte u ergeben. Ob dies der Fall ist oder nicht, hängt von dem Winkel v ab.

Schreibt man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen

$$\sin^2\alpha\,[\tfrac{1}{4}\sin^2\alpha - \sin v \sin(\alpha + v)\,\{\sin v \sin(\alpha + v) + \cos\alpha\}],$$

so kann man sich durch trigonometrische Ausrechnung leicht überzeugen, dass derselbe für $\alpha = 60°$, $v = 10°$, $\alpha + v = 70°$ positiv ist. Unter Annahme dieser Werte bekommen wir also, trotzdem $\cos\alpha > 0$ ist, für $\sin^2 u$ zwei reelle Werte, demnach auch für u. Bei Festhaltung des Wertes $\alpha = 60°$ gilt dasselbe für alle Winkel v, die kleiner als 15° sind. Für $v = 15°$ wird

$$\sin v \cdot \sin(\alpha + v) = \sin 15° \cdot \sin 75° = 0.25 = \frac{1}{4}$$

und die Bedingungsgleichung lautet:

$$\sin^2 u = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}\,[\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\}]} = \frac{1}{4}.$$

der Kegel überhaupt gleichs.-hyperbol. Schnitte zulasse, ist angeblich erforderlich, dass der Winkel an der Spitze mindestens 90^0 beträgt[1]). Ist dies der Fall, so erhalten wir im allgemeinen zwei Winkel für u, d. h. die Lage der gleichseitigen Hyperbel im Kegel „kann in doppelter Weise bestimmt werden".

Die Summe der beiden Werte u muss stets gleich α sein; ist der eine u, so ist der andere $(\alpha - u)$. Denn setzt man in

$$\sin v \cdot \sin(\alpha + v) - \sin u \cdot \sin(\alpha - u)$$

für u: $(\alpha - u)$ ein, so ist für $(\alpha - u) : (\alpha - (\alpha - u)) = u$ zu setzen, die Gleichung geht also in sich selbst über, sodass, wenn u der Gleichung genügt, von $(\alpha - u)$ dasselbe gilt.

Ist $\alpha = 90^0$, so wird die Bedingungsgleichung für u zu

$$\sin v \cdot \cos v = \sin u \cdot \cos u$$

oder $$\sin 2v = \sin 2u,$$

woraus entweder $u = v$ oder $u = 90^0 - v$ folgt.

Die Gleichung für $\sin^2 u$ gibt natürlich dasselbe Resultat, weil sie aus der vorigen abgeleitet ist. Ist also der Winkel an der Spitze des Kegels 90^0, so erhält man zwei Systeme gleichs.-hyperbol. Schnitte,

---

liefert also für u nur den einen Wert 30^0. Wir haben in diesem Falle nur ein System gleichs.-hyperbol. Schnitte, welches auf der Hauptebene der kleinsten Öffnungsweite DSD' senkrecht steht und der Halbierenden des $\measuredangle$ DSD', d. h. der reellen Hauptachse des Kegels im anal.-geom. Sinne parallel ist. Der durch die Achse selbst gehende Schnitt dieses Systems ist der Hauptschnitt der grössten Öffnungsweite, welche also hier 90^0 beträgt. Mithin ist dies System paralleler gleichseitiger Hyperbeln das einzige in diesem Kegel. Es ist $a = c = b \cdot \sqrt{3}$ und die Gleichung dieses Kegels lautet: $x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$.

Ist endlich $\alpha = 60^0$, $v > 15^0$ aber $< 75^0$, so gibt es keine gleichs.-hyperbol. Schnitte, vergl. S. 69, 2); 145.

[1]) Schreibt man statt „der Winkel an der Spitze": „die grösste Öffnungsweite", so ist der Satz richtig, geht aber nicht aus Weyers Rechnung hervor. In Weyers Ausdrucksweise dürfen alle „Winkel an der Spitze" spitze Winkel sein.

deren eines mit der Kegelseite und der Grundfläche gleich grosse Winkel bildet, deren anderes auf der Grundfläche senkrecht steht[1]).

Weyer bemerkt hierzu:

„Die erste Auflösung u = v stimmt überein mit der von La Chapelle gegebenen, wonach ein Schnitt der gleichseitigen Hyperbel in diesem Falle (nämlich für $\alpha = 90^0$) parallel zur Achse des Kegels liegen muss; denn weil das Achsendreieck hier rechtwinklig ist, so teilt die Achse des Kegels dasselbe Dreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke, woraus u = v folgt" [2]).

I.

Schon aus den kritischen Notizen der vier ersten Anmerkungen geht zur Genüge hervor, dass Weyers Untersuchungen an Klarheit vieles zu wünschen übrig lassen. Die mehrfachen Ungenauigkeiten im Ausdruck sowie der in Anmerkung 2) nachgewiesene Fehler scheinen dem Verfasser im letzten Grunde aus einem bemerkenswerten Irrtum hervorgegangen zu sein, der sich durch das Ganze hindurchzieht, und der seinerseits durch die von

[1]) Die gleichs.-hyperbol Schnitte des zweiten Systems bilden mit der andern Kegelseite des Achsendreiecks genau denselben Winkel u, den die Ebenen des ersten Systems mit der einen Kegelseite bilden. Auch wenn $\alpha \gtrless 90^0$ ist, die Winkel der beiden Systeme gegen dieselbe Kegelseite also u, bzw. $(\alpha - u)$ sind trifft dies zu, und zwar in allen Achsenschnitten im Sinne der anal. Geom., soweit überhaupt unter den gleichs.-hyperbol Schnitten des betr. Kegels sich solche befinden, die auf diesen Achselschnitten senkrecht stehen.

[2]) Die erwähnte Arbeit La Chapelles erschien bereits 1750 zu Paris unter dem Titel „Traité des sections coniques" deutsch von Böckmann, Karlsruhe 1791 [p. 361]. Nach Weyers Angabe untersucht La Chapelle an der angegebenen Stelle die Frage, welche Hyperbeln entstehen würden, wenn man in einem Kegel, dessen Winkel an der Spitze ein rechter stumpfer oder spitzer Winkel wäre, den Schnitt allemal parallel zur Achse des Kegels legte.

Weyer gewählten Gleichungsformen für den Kreis und die gleichseitige Hyperbel bedingt ist.

Während nämlich Weyer nach den von ihm voraufgeschickten Bemerkungen offenbar die Absicht hat, die Frage nach der Lage der gleichs.-hyperbol. Schnitte eines gegebenen Kegels erschöpfend zu behandeln, verhindert er ihre allgemeine Beantwortung gleich zu Anfang durch die speziellen Annahmen, die er über die Gleichungen des Kreisschnittes und der gleichseitigen Hyperbel macht. Infolgedessen findet er nur diejenigen beiden Systeme paralleler gleichs.-hyperbol. Schnitte, welche auf der Hauptebene der kleinsten Öffnungsweite senkrecht stehen, oder was dasselbe ist, sie zur Symmetrieebene haben, d. h. er behandelt in Wirklichkeit nur dasselbe spezielle Problem wie Rulf, vergl. S. 30, ja sogar ein noch spezielleres. Dass indessen Weyer selbst sich dieser Spezialisierung seiner Aufgabe nicht bewusst wird, sondern das Problem ganz allgemein gelöst zu haben glaubt, darf man wohl aus folgenden beiden Stellen schliessen, in denen er die gleichseitigen Hyperbelschnitte zu den Kreisschnitten in Parallele stellt:

> „Wenn also der Winkel an der Spitze des Kegels 90^0 ist, so gibt es folgende zwei Systeme von Schnitten für die gleichseitige Hyperbel. In dem einen System macht die Seite des Kegels gleich grosse Winkel mit der schneidenden Ebene und mit der Grundfläche. Ganz dasselbe lässt sich vom Kreisschnitte sagen, nur dass die gleichen Winkel dann als korrespondierende Winkel bei parallelen Linien liegen. Auch im zweiten System, wo $u = 90^0 - v$ ist, und die Achse der gleichseitigen Hyperbel also senkrecht zur Grundfläche des Kegels steht, findet sich die entsprechende zweite Lage der Kreisschnitte am Wechselschnitt des Kegels, indem die Durch-

messer der Kreise um den Winkel $90^0 - v$ gegen dieselbe Seite des Kegels geneigt sind."

und:

„Die folgenden elementaren Untersuchungen ergeben, dass die Lage von gleichseitigen Hyperbeln in jedem Kegel, dessen Winkel an der Spitze nicht kleiner als 90^0 ist, immer in doppelter Weise bestimmt werden kann, ähnlich wie die Lage des Kreises oder des Ellipsenschnittes von gegebener Form und seines Wechselschnittes" usw.

Besonders das letzte Zitat, in welchem Weyer das Resultat seiner Untersuchungen kurz ausspricht, gibt einen unzweideutigen Beweis für die Ansicht des Verfassers.

II.

Wir gehen jetzt dazu über, den Nachweis zu führen, dass das von Weyer gewählte Verfahren nur diejenigen beiden Systeme hypercyklischer Ebenen liefert, die auf dem Hauptschnitt der kleinsten Öffnungsweite senkrecht stehen:

Die Gleichung

$$y^2 = x\,(2\,a + x)$$

ist die Scheitelgleichung einer gleichseitigen Hyperbel bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die x-Achse, d. h. die reelle Achse der Hyperbel, muss daher auf der y-Achse senkrecht stehen, und da diese (vergl. S. 88) der Durchschnittsgeraden der Kreisebene mit der Ebene der gleichseitigen Hyperbel parallel ist, auch auf dieser Durchschnittsgeraden. Die letzte Voraussetzung ist stets erfüllt, wenn der gegebene Kegel ein Rotationskegel (= gerader Kreiskegel) ist. Im Falle des Rotationskegels liefert daher die Weyersche Methode wirklich alle gleichseitig-hyperbolischen Schnitte. Beim schiefen Kegel dagegen trifft diese Bedingung im allgemeinen nicht zu, sondern

nur für die genannten zwei Systeme gleichseitiger Hyperbeln.

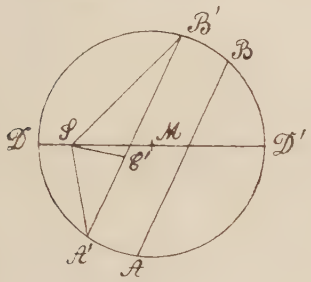


Fig. 7.

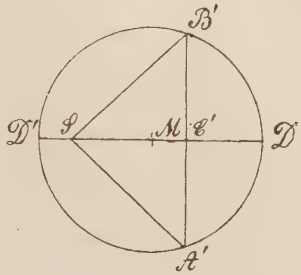


Fig. 8.

Denkt man sich nämlich die Spitze des Kegels senkrecht auf den Grundkreis projiziert, und sei S der beim schiefen Kegel exzentrisch gelegene Projektionspunkt, vergl. Fig. 7 und Fig. 8, nimmt man ferner an, dass die Sehne A B der Durchschnitt der Grundkreisebene mit einer Ebene sei, die den Kegel in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet, so bedeuten die zu A B parallelen Sehnen Schnitte des Grundkreises mit den dem gegebenen gleichseitigen Hyperbelschnitt parallelen Ebenen, welche den Kegel ebenfalls in gleichseitigen Hyperbeln von gleicher Achsen- und Asymptotenrichtung schneiden. Unter ihnen befindet sich eine, die durch die Spitze des Kegels geht, deren Schnitt mit dem Kegel daher in zwei aufeinander senkrecht stehende Erzeugende degeneriert, die zugleich die Asymptotenrichtungen der sämtlichen parallelen Hyperbelschnitte angeben. Die Projektionen dieser Erzeugenden seien SA′ und SB′, Fig. 7, und A′B′ demnach der AB parallele Durchschnitt ihrer Ebene mit der Kreisebene. Die reelle Achse der sämtlichen parallelen gleichs. - hyperb. Schnitte ist dann parallel der Halbierenden des von den genannten Erzeugenden eingeschlossenen rechten Winkels, deren Projektion SC′ sei. Soll diese Winkelhalbierende, die

die Stellung der x-Achse der gleichseitigen Hyperbeln angibt, wie Weyer, ohne es zu bemerken, voraussetzt, auf A′B′ im Mittelpunkte senkrecht stehen, so gilt dasselbe von ihrer senkrechten Projektion SC′, d. h das Dreieck A′SB′ muss in diesem Falle ein rechtwinklig-gleichschenkliges sein. Das ist nur möglich, wenn A′B′ auf dem durch S gehenden Durchmesser des Grundkreises senkrecht steht, Fig. 8. Dieser Durchmesser DD′ ist dann zugleich die x′-Achse der Grundkreisebene und die Projektion der x-Achsen der Ebenen der gleichseitigen Hyperbelschnitte, also auch die Projektion der durch beide bestimmten, auf dem Grundkreis senkrecht stehenden Ebene (DSD′ in Figur 6), welche auch die Kegelachse SM im elementargeometrischen Sinne enthält. Aus der Betrachtung der Figur erkennt man leicht, dass die reelle Hauptachse des Kegels in der Ausdrucksweise der anal. Geometrie, da sie zugleich Symmetrieachse ist, die Grundfläche in einem Punkte des Durchmessers DD′ durchbohren, also ebenfalls der Ebene DSD′ angehören muss, welch letztere daher sowohl in der Bezeichnungsweise Weyers wie auch in der der analytischen Raumgeometrie zu den Achsenschnitten gehört. Da in ihr der Neigungswinkel der reellen Kegelachse gegen das eine Kreisschnittsystem liegt, ist sie, wie die Theorie der Kreisschnitte lehrt, die Hauptebene, welche die kleinere der beiden Nebenachsen enthält, mit andern Worten der Hauptschnitt der kleinsten Öffnungsweite, und die von Weyer ermittelten gleichs.-hyperbol. Schnitte sind lediglich die auf dieser Ebene senkrecht stehenden, wie behauptet war.

III.

Endlich sei noch einmal an den Fall erinnert, in dem nach der Bezeichnung Weyers der Winkel an der Spitze ein rechter ist. Unter dieser Voraussetzung ergab sich, dass das eine System der gleichseitigen

Hyperbelschnitte der (Weyer schen) Achse des Kegels parallel war, das andere auf der kreisförmigen Grundfläche senkrecht stand.

Hier liegt gegenüber dem bisher Gesagten eine Ausnahme vor, indem unter der Bedingung $\alpha = 90^0$ das von Weyer gefundene Resultat auf alle gleichs.-hyperbol. Schnitte des Kegels Anwendung findet, ohne dass dies jedoch aus Weyers Ableitung gefolgert werden könnte. Von den Rotationskegeln abgesehen, ist dies der einzige Fall, in dem eine derartige Verallgemeinerung zulässig ist.

Denkt man sich nämlich in Fig. 9 den auf dem Grundkreis senkrechten Achsenschnitt, in Fig. 10 den

Fig. 10.

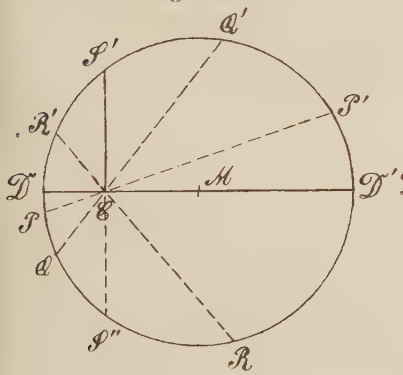
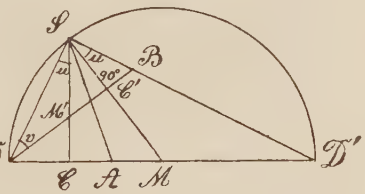


Fig. 9.



Grundkreis selbst gezeichnet, so folgt daraus, dass $\sphericalangle DSD' = \alpha = 90^0$ sein soll, dass S auf der Peripherie des über DD' als Durchmesser errichteten Halbkreises liegt, dass also die Kegelachse SM dem Radius des Grundkreises MD gleich ist. Da nun die Basis jedes Achsendreiecks ein Durchmesser des Grundkreises ist und die Spitze S desselben vom Mittelpunkt M der Basis die konstante Entfernung SM = MD haben, also auf einem mit dem Radius des Grundkreises um M geschlagenen Bogen liegen muss, so ist der Winkel an der Spitze in allen Achsenschnitten im elementar-

geometrischen Sinne ein rechter, vergl. S. 86, Fig. 4. Nun gibt es zu jedem Paare zu einander normaler Erzeugenden ein System paralleler gleichs.-hyperbol. Schnitte, vergl. S. 15. Daraus folgt, dass im betrachteten Falle alle den Achsenschnitten parallelen Ebenen, d. h. alle der Kegelachse SM parallelen Ebenen den gegebenen Kegel in gleichseitigen Hyperbeln schneiden.

Hiermit sind aber noch nicht alle gleichseitigen Hyperbelschnitte unseres Kegels gefunden, wie die Betrachtung derjenigen ebenen Schnitte des Kegels lehrt, welche dem durch die Höhe SC des Haupt-Achsenschnittes der kleinsten Öffnungsweite DSD′ bestimmten Ebenenbüschel angehören. Alle diese Schnitte stehen auf dem Grundkreis des Kegels senkrecht, da die Achse SC des Ebenenbüschels auf der Grundkreisebene senkrecht steht, und alle liefern Dreiecke von gleicher Höhe SC. Von den Grundlinien dieser Dreiecke sind in Fig. 10 einige gezeichnet: PP′, QQ′, RR′, DD′, S′S″. Ist S′S″ $\perp$ DD′, so ist S′C = S″C mittlere Proportionale zwischen den jedesmaligen beiden Abschnitten, in welche die Sehnen des Grundkreises PP′, QQ′, RR′ und auch der Durchmesser DD′ durch C geteilt werden (vergl. die bekannten Sätze über die Potenzen am Kreise). Ferner ist S′C gleich der Höhe SC der zu untersuchenden Schnittdreiecke; PC und P′C, QC und Q′C usw. sind also Höhenabschnitte in diesen Dreiecken; d. h. in allen diesen Dreiecken ist die Höhe mittlere Proportionale zwischen den Höhenabschnitten, die Dreiecke müssen also sämtlich bei S rechtwinklig sein. Daher liefern auch alle zu SC parallelen, mit andern Worten alle auf dem Grundkreise senkrecht stehenden Ebenen gleichs.-hyperbol. Schnitte.

Wie wir gesehen, vergl. S. 91, 92 ist in Fig. 9 $\angle$ MSD′ = u $\angle$ MD′S = v, ferner $\angle$ CSD′ = 90° — v — 90° — u, folglich $\angle$ CSD = DSD′ — CSD′ = 90°

$-(90^0 - u)$, d. h. ebenfalls gleich u. Sieht man den Kegel als elliptischen Kegel im Sinne der anal. Geometrie an, so ist die reelle Achse desselben die Winkelhalbierende SA des ∠ DSD'. Die beiden Achsen SM und SC der Ebenenbüschel, denen die Ebenen der gleichseitigen Hyperbelschnitte des Kegels parallel sind, liegen also in der Hauptebene der kleinsten Öffnungsweite zur Hauptachse des Kegels symmetrisch.

Aus der Theorie der Kreisschnitte ist bekannt, dass die Kreisschnitte des zweiten Systems mit der Seite SD des in Fig. 9 gezeichneten Hauptschnittes gleich grosse Winkel v bilden, wie die dem ersten System angehörige Grundkreisebene mit der andern Kegelseite SD' des Achsendreiecks, ebenso dass auch sie auf der Ebene DSD' senkrecht stehen. Einer dieser Kreisschnitte ist gezeichnet, DB in Fig. 9. Betrachten wir ihn als Grundkreis des Kegels, so ist SC die Kegelachse im elementargeometrischen Sinne und SM steht auf der Grundkreisebene senkrecht, wie leicht zu zeigen.

Der Satz, dass erstens alle der Kegelachse parallelen, zweitens alle auf dem Grundkreise senkrecht stehenden Ebenen den Kegel in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, bleibt also auch bei dieser Auffassung bestehen, nur dass die beiden Systeme gleichs. - hyperbol. Schnitte die Rollen gewechselt haben.

In die Sprechweise der anal. Geometrie des Raumes übertragen lässt sich dies Ergebnis folgendermassen zusammenfassen:

> In jedem Kegel, dessen kleinste Öffnungsweite 90^0 beträgt, gibt es zwei Systeme von gleichseitig - hyperbolischen Schnitten, deren Ebenen zwei durch die Kegelspitze gehenden

und auf den Kreisschnittebenen senkrecht stehenden Geraden parallel sind, oder:

Alle auf irgend einem der Kreisschnitte senkrecht stehenden Ebenen schneiden den betrachteten Kegel in gleichseitigen Hyperbeln, bzw. auf einander normalen Kegelstrahlen.

Ferner: Alle diejenigen Ebenen, welche den Kegel in Paaren zu einander normaler Erzeugenden schneiden, gehören zwei Ebenenbüscheln an, deren Träger jene beiden Geraden sind, welche in der durch die Hauptachse und die kleinere der beiden Nebenachsen bestimmten Ebene, d. i. der Hauptebene der kleinsten Öffnungsweite, zur Hauptachse symmetrisch liegen.

Im allgemeinen ist hierbei vorausgesetzt, dass der Kegel ein „schiefer Kegel" ist, mithin, von dem einen rechtwinkligen Hauptschnitt DSD′ abgesehen, in den durch die reelle Hauptachse geführten Schnitten stumpfe Winkel an der Spitze aufweist, vergl. S. 87.

Sind alle Achsenschnitte im anal.-geom. Sinne rechtwinklig, so ist der Kegel ein Rotations- oder gerader Kreiskegel. Dann fällt die reelle Hauptachse SA mit den beiden Kegelachsen im elementargeometrischen Sinne, SM und SM′ (SC) zusammen und alle Kreisschnitte des Kegels stehen auf ihr senkrecht, während alle zur Achse parallelen Ebenen gleichseitig-hyperbolische Schnitte liefern, vergl. S. 69, 1) und S. 70, 4).

II. Teil.

Der neuen Ableitung der Sätze über die hyperzyklischen Ebenen der Oberflächen 2. Ordnung schicken wir einige allgemeine Bemerkungen über Ebenenkoordinaten und Gleichungen zwischen denselben voran, die zwar wohl nichts Neues enthalten, an die wir jedoch erinnern wollen, um uns später darauf berufen zu können.

IV. Kapitel.

§ 9.

Über Ebenenkoordinaten.

Ist die Gleichung einer Ebene mit Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem O_{xyz} in der allgemeinen Form

$$1) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

gegeben, so versteht man unter den *gewöhnlichen Plückerschen Koordinaten* dieser Ebene die Ausdrücke

$$\frac{\alpha}{\delta}, \quad \frac{\beta}{\delta}, \quad \frac{\gamma}{\delta},$$

d. h. die negativen reziproken Werte der drei Strecken, welche von der Ebene auf den bezüglichen Koordinatenachsen abgeschnitten werden. In der Normalform der Ebenengleichung

$$2) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z + 1 = 0$$

bedeuten die Koeffizienten α, β, γ direkt die Koordinaten

der Ebene[1]). Die Auffassung dieser Ausdrücke als Koordinaten, d. h. Bestimmungsstücke der Ebene ist berechtigt, weil ihre Beziehung zu der Lage der Ebene eine wechselseitig eindeutige ist. Nur in einem Falle erleidet diese Eindeutigkeit eine Ausnahme, nämlich wenn die Ebene durch den Koordinatenanfangspunkt O geht, da dann stets die Abschnitte auf den drei Achsen gleich Null, die Koordinaten der Ebene also unendlich gross werden. Die Normalform der Ebenengleichung versagt in diesem Falle, in der allgemeinen Gleichung wird $\delta = 0$.

Will man die durch O gehenden Ebenen nicht von der Betrachtung ausschliessen, so muss man sich daher nach einer andern Definition der Ebenenkoordinaten umsehen. Diese Erwägung führte zur Einführung der *homogenen Ebenenkoordinaten*. Als solche gelten die Koeffizienten α, β, γ, δ in der homogen geschriebenen Gleichung der Ebene:

$$3) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0.$$

Diese sind zwar nicht selbst eindeutig bestimmt[2]), wenn die Ebene gegeben ist, wohl aber ihr Verhältnis $\alpha : \beta : \gamma : \delta$, und es ist stets möglich, von den homogenen Koordinaten zu den gewöhnlichen überzugehen und umgekehrt. Das erstere geschieht, indem man $\delta = 1$ setzt, das letztere, indem man $\alpha = \frac{\alpha'}{\delta'}$, $\beta = \frac{\beta'}{\delta'}$, $\gamma = \frac{\gamma'}{\delta'}$ setzt und die ganze Gleichung mit δ' multipliziert[3]), bezw. die Gleichungen höheren Grades mit der höchsten vorkommenden Potenz von δ'. Dadurch wird die

[1]) Durch diese Wahl der Definition erzielte Plücker, dass der duale Charakter von Punkt und Ebene auch in den Gleichungen hervortritt. Gleichung 2) bedeutet bei variablen α, β, γ und konstanten x, y, z den Punkt mit den Koordinaten x, y, z.

[2]) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ können mit demselben beliebigen Faktor $\varkappa$ versehen werden, ohne dass die Gleichung 3) ihre Bedeutung ändert.

[3]) Für $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ darf man, da es nur auf die Form der Gleichung ankommt, nachträglich wieder $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ schreiben.

Gleichung in jedem Gliede vom selben Grade in den Unbekannten, sie wird „homogen"; ihre Bedeutung bleibt dieselbe wie vorher.

Da hiernach sowohl die gewöhnlichen wie die homogenen Ebenenkoordinaten für drei von einander unabhängige Grössen zählen, so sagt man, es gäbe

∞^3 *Ebenen im Raume*

oder die Ebenen des Raumes bilden eine dreifache Mannigfaltigkeit, ebenso wie ihr duales Gebilde, die Punkte im Raume.

Eine Gleichung zwischen den Ebenenkoordinaten[1]*),* von welcher Form sie auch sei, macht eins der drei Verhältnisse $\frac{\alpha}{\delta}$, $\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ von den beiden anderen abhängig, stellt also

eine Gesamtheit von ∞^2 *Ebenen*

dar, welche man allgemein als

Ebenenbündel

— im weiteren Sinne des Wortes — bezeichnet. Ist die das Ebenenbündel repräsentierende Gleichung vom n-ten Grade in den Ebenenkoordinaten, so umhüllen die ∞^2 Ebenen des Bündels im allgemeinen

eine Fläche n-ter Klasse,

das duale Gebilde einer Fläche n-ter Ordnung, welche die durch eine Gleichung n-ten Grades in Punktkoordinaten definierte Gesamtheit von ∞^2 Punkten ist.

Den einfachsten Spezialfall bildet die Gesamtheit aller durch denselben Raumpunkt gehenden Ebenen, das

Ebenenbündel im engeren Sinne.

Demselben entspricht eine in α, β, γ, δ lineare Gleichung, welche demnach auch als Gleichung seines Trägers, des Punktes, aufgefasst werden kann, wie eine

[1]) Da wir nach Obigem jede derartige Gleichung homogen machen können, so betrachten wir im folgenden nur die homogenen Gleichungen.

in x, y, z, t lineare Gleichung eine Ebene als Träger eines Punktfeldes bedeutet[1]). Der Punkt und die Ebene sind die einzigen Formen der Flächen 1. Klasse, bezw. 1. Ordnung.

Fehlen in der homogenen Gleichung eine oder mehrere der Ebenenkoordinaten, so arten die ihr entsprechenden Flächen n-ter Klasse in ebene Kurven n-ter Klasse oder n getrennte oder zusammenfallende Punkte aus. Auch diese hat man sich aus allen durch sie hindurchgehenden Ebenen zusammengesetzt zu denken.

Zwei Gleichungen zwischen α, β, γ, δ stellen die gemeinsamen Elemente zweier Ebenenbündel, d. h. die ∞^1 gemeinsamen Tangentialebenen zweier Flächen n-ter Klasse dar. Eine so definierte Gesamtheit von ∞^1 Ebenen nennt man allgemein einen

Ebenenbüschel

im weiteren Sinne des Wortes. Derselbe ist das duale Gebilde einer Raumkurve als Durchschnitt zweier Flächen von beliebiger Ordnung.

Als

Ebenenbüschel im engeren Sinne

bezeichnet man wieder den einfachsten Fall des Ebenenbüschels, nämlich den durch zwei in α, β, γ, δ lineare Gleichungen dargestellten Ebenenbüschel. Derselbe besteht aus den ∞^1 Ebenen durch die Verbindungslinie der beiden durch die gegebenen Gleichungen dargestellten Punkte, welche man die Achse des Büschels nennt. Das duale Gebilde ist die Punktreihe, deren Träger die Schnittgerade zweier gegebener Ebenen ist.

[1]) Gleichung 3) stellt daher entweder eine Ebene oder einen Punkt dar, je nachdem x, y, z, t oder $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ variabel sind, vergl. S. 102, Anm. [1]). Sind sowohl x, y, z, t als auch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ konstant, so bedeutet 3) die vereinigte Lage von Punkt und Ebene.

Unsere späteren Untersuchungen werden mehrfach auf derartige homogene Gleichungen zwischen Ebenenkoordinaten führen, wir gehen daher im folgenden noch etwas näher auf die verschiedenen Formen derselben ein, stellen jedoch zuvor eine Hülfstabelle von den homogenen Koordinaten der Elemente des rechtwinkligen Koordinatensystems $O/_{xyz}$ zusammen [1]).

Da wir es mit homogenen Koordinaten zu tun haben, fassen wir $O/_{xyz}$ als Koordinatentetraeder auf, dessen vierte Koordinatenebene die unendlich ferne Ebene ist.

I. *Die Koordinatenebenen:*

a) $x = 0$:	yz - Ebene	: $\beta = 0,\ \gamma = 0,\ \delta = 0.$
b) $y = 0$:	zx - Ebene	: $\gamma = 0,\ \alpha = 0,\ \delta = 0.$
c) $z = 0$:	xy - Ebene	: $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \delta = 0.$
d) $t = 0$:	Unendl. ferne Ebene	: $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0.$

II. *Die Koordinatenachsen:*

$y = 0,\ z = 0$:	x - Achse	: $\alpha = 0,\ \delta = 0.$
$z = 0,\ x = 0$:	y - Achse	: $\beta = 0,\ \delta = 0.$
$x = 0,\ y = 0$:	z - Achse	: $\gamma = 0,\ \delta = 0,$
$x = 0,\ t = 0$:	Unendl. ferne Gerade der yz-Ebene	: $\beta = 0,\ \gamma = 0.$
$y = 0,\ t = 0$:	„ „ „ „ zx-Ebene	: $\gamma = 0,\ \alpha = 0.$
$z = 0,\ t = 0$:	„ „ „ „ xy-Ebene	: $\alpha = 0,\ \beta = 0.$

III. *Die Koordinatenpunkte:*

$y = 0,\ z = 0,\ t = 0$:	Unendl. ferner Punkt der x-Achse	: $\alpha = 0.$
$z = 0,\ x = 0,\ t = 0$:	„ „ „ „ y-Achse	: $\beta = 0.$
$x = 0,\ y = 0,\ t = 0$:	„ „ „ „ z-Achse	: $\gamma = 0.$
$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$:	Koordinatenanfangspunkt O . .	: $\delta = 0.$

[1]) Die Tabelle enthält links die Bedingungen für die homogenen Koordinaten der Punkte, welche die betreffenden Elemente zusammensetzen, rechts die Bedingungen für die Koordinaten der dieselben Elemente erzeugenden Ebenen. Die letzteren folgen aus der Gleichung:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0$$

durch Einsetzen der jedesmaligen speziellen Werte der Punktkoordinaten.

Die homogenen Gleichungen zwischen Ebenenkoordinaten[1]*:*

A.

I. $$f^n(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$$

ist die allgemeinste Form einer Gleichung zwischen den Ebenenkoordinaten. Wie bereits erwähnt, stellt sie eine *Fläche n-ter Klasse* dar, umhüllt von ihren Tangentialebenen.

II. $$f^n(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$ [2])

bedeutet eine *in der unendlich fernen Ebene gelegene Kurve n-ter Klasse*, denn:

Wird die Gleichung durch die Koordinaten α, β, γ irgend einer Ebene befriedigt, so genügen ihr auch die Koordinaten $\varkappa\alpha$, $\varkappa\beta$, $\varkappa\gamma$ aller parallelen Ebenen, wo $\varkappa$ ein beliebiger Zahlenfaktor ist. Ferner gehört zu den durch die Gleichung repräsentierten Ebenen nach S. 105, I d) die unendlich ferne Ebene. Dieselbe wird von den genannten Systemen paralleler Ebenen in je einer Geraden geschnitten, und alle diese Geraden umhüllen eine Kurve n-ter Klasse.

III. $$f^n(\alpha, \beta) = 0$$

ist die Gleichung einer *Gruppe von n Punkten auf der unendlich fernen Geraden der xy-Ebene*, denn:

Da die Gleichung in α und β homogen ist, so kann man sie als Gleichung n-ten Grades für $\frac{\alpha}{\beta}$ auffassen. Sie lässt daher eine Zerlegung in n Linearfaktoren von der Form:

$$\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta$$

zu. Jeder solche Faktor liefert, gleich Null gesetzt, eine lineare Gleichung zwischen α und β, welcher ein

[1]) Wir beschränken uns bei dieser Übersicht auf diejenigen Formen der Gleichungen, welche für das Folgende von Bedeutung sind.

[2]) Gleichungen von der Form

$$f^n(\beta, \gamma, \delta) = 0,\ f^n(\gamma, \alpha, \delta) = 0,\ f^n(\alpha, \beta, \delta) = 0$$

bedeuten ebene Kurven n-ter Klasse in der yz-, zx-, xy-Ebene.

Punkt entspricht der der Gleichung $f^n(\alpha, \beta \ldots = 0$ genügt. Alle diese n Punkte müssen nach S. 105, IIf) auf der unendlich fernen Geraden der xy-Ebene liegen.

IV. $f^n(\alpha) = 0$ *oder* $\alpha^n = 0$.

Unendlich ferner Punkt der x-Achse n-fach gezählt, bzw. alle der x-Achse parallelen Ebenen n-fach gerechnet, da nach S. 105, IIIa) die Koordinaten aller dieser Ebenen und nur diese der Gleichung $\alpha^n = 0$ genügen.

$$f^n(\delta) = 0 \text{ oder } \delta^n = 0$$

endlich bedeutet nach S. 105, IIId) *das durch den Koordinatenanfangspunkt O gehende Ebenenbündel n-fach.*

B.

Von den durch zwei Gleichungen von der Form:

$$f^n(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0,\ g^n(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$$

dargestellten *Ebenenbüscheln* (vergl. S. 104) betrachten wir nur diejenigen, welche durch Kombination der Gleichung $\delta = 0$ mit einer der Gleichungen I—IV entstehen. S. 105, IIId) lässt allgemein erkennen, dass diese Ebenenbüschel sich aus denjenigen Ebenen des durch die letzte Gleichung dargestellten Ebenenbündels (vergl. S. 103) zusammensetzen, welche durch den Koordinatenanfangspunkt O gehen.

I. $f^n(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0,\ \delta = 0.$

Ebenenbüschel, bestehend aus den von O ausgehenden Tangentialebenen der Fläche $f^n(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$.

Durch Einsetzen von $\delta = 0$ in die Flächengleichung reduzieren sich die Gleichungen auf

$$f^n(\alpha, \beta, \gamma) = 0,\ \delta = 0,$$

d. h. mit Rücksicht auf S. 105, II: Diese α^1 Tangentialebenen sind gleichzeitig die Verbindungsebenen des Koordinatenanfangspunktes mit den Tangenten einer unendlich fernen Kurve n-ter Klasse, umhüllen also einen ***Kegel n-ter Klasse.***

II. $f^n(\alpha, \beta) = 0, \ \delta = 0.$

Alle Ebenen durch die Verbindungslinien von O mit den n unendlich fernen Punkten der xy-Ebene: $f^n(\alpha, \beta) = 0$, vergl. S. 105, III, d. h. *n Ebenenbüschel im engeren Sinne, deren Achsen sämtlich in der xy-Ebene gelegen sind und durch O gehen*[1]).

III. $f^n(\alpha) = 0, \ \delta = 0$ oder $\alpha^n = 0, \ \delta = 0.$

Ebenenbüschel durch die x-Achse n-fach, vergl. S. 105, IV.

Von den speziellen Beispielen für die auf den beiden letzten Seiten behandelten Gleichungen A, I—IV und B, I-III interessieren uns nur die quadratischen und linearen Gleichungen, die wir der grösseren Übersichtlichkeit halber tabellarisch zusammenstellen:

Quadratische Gleichungen für Ebenenkoordinaten.

A. I.

1. $b_{11}\alpha^2 + b_{22}\beta^2 + b_{33}\gamma^2 + b_{44}\delta^2 + 2b_{23}\beta\gamma + 2b_{31}\gamma\alpha + 2b_{12}\alpha\beta + 2b_{14}\alpha\delta + 2b_{24}\beta\delta + 2b_{34}\gamma\delta = 0.$

Allgemeine Gleichung einer Fläche 2. Klasse.

2. $b_{11}\alpha^2 + c_{22}\beta^2 + b_{33}\gamma^2 + b_{44}\delta^2 + 2b_{23}\beta\gamma + 2b_{31}\gamma\alpha + 2b_{12}\alpha\beta = 0.$

Mittelpunktsgleichung einer Fläche 2. Klasse.

3. $b_{11}\alpha^2 + b_{22}\beta^2 + b_{33}\gamma^2 + b_{44}\delta_2 = 0.$

Hauptachsengleichung einer Fläche 2. Klasse.

II.

4. $b_{11}\alpha^2 + b_{22}\beta^2 + b_{33}\gamma^2 + 2b_{23}\beta\gamma + 2b_{31}\gamma\alpha + 2b_{12}\alpha\beta \quad 0.$

Unendlich ferner Kegelschnitt in beliebiger Lage.

5. $b_{11}\alpha^2 + b_{22}\beta^2 + b_{33}\gamma^2 = 0.$

Hauptachsengleichung eines unendl. fernen Kegelschnittes.

---

[1]) Diese Achsen sind, nebenbei bemerkt, die n von O ausgehenden Tangenten der in der xy-Ebene gelegenen Kurve n-ter Klasse $f^n(\alpha, \beta, \delta) = 0$.

III.

6. $b_{11}\,\alpha^2 + b_{22}\,\beta^2 + 2\,b_{12}\,\alpha\beta = 0.$

Beliebiges Punktepaar auf der unendlich fernen Geraden der xy-Ebene.

7. $b_{22}\,\beta^2 + b_{33}\,\gamma^2 + 2\,b_{23}\,\beta\gamma = 0.$

Beliebiges Punktepaar auf der unendlich fernen Geraden der yz-Ebene.

8. $b_{33}\,\beta^2 + b_{11}\,\alpha^2 + 2\,b_{31}\,\gamma\alpha = 0.$

Beliebiges Punktepaar auf der unendlich fernen Geraden der zx-Ebene.

9. $b_{11}\,\alpha^2 + b_{22}\,\beta^2 = 0.$

Zu den Achsen symmetrisch gelegenes Punktepaar auf der unendlich fernen Geraden der xy-Ebene.

10. $b_{22}\,\beta^2 + b_{33}\,\gamma^2 = 0.$

Zu den Achsen symmetrisch gelegenes Punktepaar auf der unendlich fernen Geraden der xy-Ebene.

11. $b_{33}\,\gamma^2 + b_{11}\,\alpha^2 = 0.$

Zu den Achsen symmetrisch gelegenes Punktepaar auf der unendlich fernen Geraden der zx-Ebene.

IV.

12. $\alpha^2 = 0.$

Unendlich ferner Punkt der x-Achse doppelt, bzw. alle der x-Achse parallelen Ebenen doppelt gezählt.

13. $\beta^2 = 0.$

Unendlich ferner Punkt der y-Achse doppelt, bzw. alle der y-Achse parallelen Ebenen doppelt gezählt.

14. $\gamma^2 = 0.$

Unendlich ferner Punkt der z-Achse doppelt, bzw. alle der z-Achse parallelen Ebenen doppelt gezählt.

15. $\delta^2 = 0.$

Ebenenbündel durch O doppelt gezählt.

B. 1.

16. $b_{11}\alpha^2 + b_{22}\beta^2 + b_{33}\gamma^2 + 2b_{23}\beta\gamma + 2b_{31}\gamma\alpha + 2b_{12}\alpha\beta = 0,$
$\delta = 0$

Kegel 2. Grades mit Spitze in O in beliebiger Lage = Tangentialkegel von O an die Fläche 2. Klasse:

$$b_{11}\alpha^2 + b_{22}\beta^2 + b_{33}\gamma^2 + b_{44}\delta^2 + 2b_{23}\beta\gamma + 2b_{31}\gamma\alpha + 2b_{12}\alpha\beta + 2b_{14}\alpha\delta + 2b_{24}\beta\delta + 2b_{34}\gamma\delta = 0$$

oder auch an die Fläche:

$$b_{11}\alpha^2 + b_{22}\beta^2 + b_{33}\gamma^2 + b_{44}\delta^2 + 2b_{23}\beta\gamma + 2b_{31}\gamma\alpha + 2b_{12}\alpha\beta = 0.$$

17. $b_{11}\alpha^2 + b_{22}\beta^2 + b_{33}\gamma^2 = 0,\ \delta = 0.$

Hauptachsengleichung eines Kegels 2. Grades mit Spitze O = Tangentialkegel von O an die Fläche 2. Klasse:

$$b_{11}\alpha^2 + b_{22}\beta^2 + b_{33}\gamma^2 + b_{44}\delta^2 + 2b_{14}\alpha\delta + 2b_{24}\beta\delta + 2b_{34}\gamma\delta = 0$$

oder auch an die Fläche:

$$b_{11}\alpha^2 + b_{22}\beta^2 + b_{33}\gamma^2 + b_{44}\delta^2 = 0.$$

II.

18. $b_{11}\alpha^2 + b_{22}\beta^2 + 2b_{12}\alpha\beta = 0,\ \delta = 0.$

Zwei Ebenenbüschel im engeren Sinne, deren in der xy-Ebene gelegene Achsen durch O gehen[1]).

19. $b_{22}\beta^2 + b_{33}\gamma^2 + 2b_{23}\beta\gamma = 0,\ \delta = 0.$

Zwei Ebenenbüschel im engeren Sinne, deren in der yz-Ebene gelegene Achsen durch O gehen.

20. $b_{33}\gamma^2 + b_{11}\alpha^2 + 2b_{31}\gamma\alpha = 0,\ \delta = 0.$

Zwei Ebenenbüschel im engeren Sinne, deren in der zx-Ebene gelegene Achsen durch O gehen.

---

[1]) Aus $b_{11}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2b_{12}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + b_{22} = 0$

erhält man zwei verschiedene Lösungen für $\frac{\alpha}{\beta}$, welche die trigonometrischen Tangenten der beiden Winkel φ_1 und φ_2 bedeuten, welche die Achsen der beiden Ebenenbüschel mit der x-Achse bilden.

21. $b_{11}\alpha^2 + b_{22}\beta^2 = 0,\ \delta = 0.$

Zwei Ebenenbüschel, deren Achsen in der xy-Ebene zu den Koordinatenachsen symmetrisch liegen und durch O gehen [1]).

22. $b_{22}\beta^2 + b_{33}\gamma^2 = 0,\ \delta = 0.$

Zwei Ebenenbüschel, deren Achsen in der yz-Ebene zu den Koordinatenachsen symmetrisch liegen und durch O gehen.

23. $b_{33}\gamma^2 + b_{11}\alpha^2 = 0,\ \delta = 0.$

Zwei Ebenenbüschel, deren Achsen in der zx-Ebene zu den Koordinatenachsen symmetrisch liegen und durch O gehen.

24. $\alpha^2 + \beta^2 = 0,\ \delta = 0.$

Zwei Ebenenbüschel, deren Achsen die Winkel zwischen der x- und der y-Achse halbieren [2]).

25. $\beta^2 + \gamma^2 = 0,\ \delta = 0.$

Zwei Ebenenbüschel, deren Achsen die Winkel zwischen der y- und der z-Achse halbieren.

26. $\gamma^2 + \alpha^2 = 0,\ \delta = 0.$

Zwei Ebenenbüschel, deren Achsen die Winkel zwischen der z- und der x-Achse halbieren.

III.

27. $\alpha^2 = 0,\ \delta = 0.$

Ebenenbüschel durch die x-Achse doppelt.

28. $\beta^2 = 0,\ \delta = 0.$

Ebenenbüschel durch die y-Achse doppelt.

29. $\gamma^2 = 0,\ \delta = 0.$

Ebenenbüschel durch die z-Achse doppelt.

---

[1]) Aus $$b_{11}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + b_{22} = 0$$

erhält man $\frac{\alpha}{\beta} = \pm\sqrt{\frac{b_{22}}{b_{11}}}$, d. h. $\operatorname{tg}\varphi_2 = -\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}(180^\circ - \varphi_1)$.

[2]) Aus $$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 1 = 0$$

folgt $\frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{tg}\varphi = \pm 1$, also $\operatorname{tg}\varphi_2 = -\operatorname{tg}\varphi_1 = -1$; $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$.

Lineare Gleichungen für Ebenenkoordinaten.

Wir könnten die linearen Gleichungen ebenso wie die quadratischen als Spezialfälle der auf S. 106—108 besprochenen Gleichungen A, I—IV und B, 1—III gewinnen, ziehen es jedoch vor, uns eines anderen Verfahrens zu ihrer Deutung zu bedienen.

Wie erwähnt, stellt jede lineare Gleichung zwischen Ebenenkoordinaten einen Punkt als Träger eines Ebenenbündels dar, und die Koeffizienten x, y, z, t in der Gleichung sind die homogenen Koordinaten des Punktes. Diesen Umstand benutzen wir in der folgenden Tabelle, um die Lage des Punktes in den verschiedenen speziellen Fällen der Gleichung zu bestimmen.

A. I.	$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t=0$	:	Beliebiger Punkt.
II.a)	$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$	$t=0$:	Punkt der unendl. fernen Ebene [1]).
b)	$\alpha x+\beta y+\delta t=0$	$z=0$:	Punkt d. xy-Ebene.
c)	$\beta y+\gamma z+\delta t=0$	$x=0$:	„ „ yz-Ebene.
d)	$\alpha x+\gamma z+\delta t=0$	$y=0$:	„ „ zx-Ebene.
III.a)	$\alpha x+\beta y=0$	$z=0, t=0$:	Punkt der unendl. fernen Geraden d. xy-Ebene [2]).
b)	$\beta y+\gamma z=0$	$x=0, t=0$:	Punkt der unendl. fernen Geraden d. yz-Ebene.
c)	$\alpha x+\gamma z=0$	$y=0, t=0$:	Punkt der unendl. fernen Geraden der zx-Ebene.
d)	$\alpha x+\delta t=0$	$y=0, z=0$:	Punkt d. x-Achse.
e)	$\beta y+\delta t=0$	$z=0, x=0$:	„ „ y-Achse.
f)	$\gamma z+\delta t=0$	$x=0, y=0$:	„ „ z-Achse.

[1]) Bzw. alle Ebenen, welche einer beliebig im Raume gelegenen Achse von bestimmter Richtung parallel sind.

[2]) Bzw. alle Ebenen, welche einer in der xy-Ebene gelegenen Achse von bestimmter Richtung parallel sind.

IV.a) $\alpha = 0$ | $y = 0, z = 0, t = 0$: Unendl. fern. Punkt der x-Achse [1]).

b) $\beta = 0$ | $z = 0, x = 0, t = 0$: Unendl. fern. Punkt der y-Achse.

c) $\gamma = 0$ | $x = 0, y = 0, t = 0$: Unendl. fern. Punkt der z-Achse.

d) $\delta = 0$ | $x = 0, y = 0, z = 0$: Koordinatenanfangspunkt O.

Vereinigen wir die Gleichungen IIa); IIIa), b), c); IVa), b), c) der Reihe nach mit IVd, so erhalten wir folgende Ebenenbüschel, deren Achsen sämtlich durch O gehen [2]:)

B. I. $\alpha x+\beta y+\gamma z = 0, \delta = 0$: Beliebiger Ebenenbüschel durch O [3]).

II. a) $\alpha x+\beta y = 0 \quad , \delta = 0$: Ebenenbüschel durch O, dessen Achse in der xy-Ebene gelegen ist [4]).

b) $\beta y+\gamma z = 0 \quad , \delta = 0$: Ebenenbüschel durch O, dessen Achse in der yz-Ebene gelegen ist.

c) $\alpha x+\gamma z = 0 \quad , \delta = 0$: Ebenenbüschel durch O, dessen Achse in der zx-Ebene gelegen ist.

III. a) $\alpha = 0, \delta = 0$: Ebenenbüschel durch die x-Achse.

b) $\beta = 0, \delta = 0$: „ „ „ y- „

c) $\gamma = 0, \delta = 0$: „ „ „ z- „

---

[1]) Bzw. alle der x-Achse parallelen Ebenen.

[2]) Wir bezeichnen dieselben daher im folgenden kurz als „Ebenenbüschel durch O".

[3]) Die Achse des Büschels ist die Verbindungslinie von O mit dem beliebigen unendlich fernen Punkt $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ oder auch mit dem in gleicher Richtung liegenden endlichen Punkt $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0$.

[4]) Die Achse des Büschels geht durch den unendlich fernen Punkt der xy-Ebene: $\alpha x + \beta y = 0$ und bildet mit der x-Achse einen Winkel φ, den man aus $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{y}{x}$ erhält.

Nach diesen Hülfsbetrachtungen wenden wir uns im folgenden Paragraphen unserm eigentlichen Thema zu, nämlich der Frage, unter welchen Bedingungen eine gegebene Oberfläche 2. Ordnung von einer beliebigen Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten wird.

V. Kapitel.

§ 10.

Ableitung der allgemeinen Bedingung für gleichseitig-hyperbolische Schnitte einer Oberfläche 2. Ordnung.

Ist eine beliebige Oberfläche 2. Ordnung durch ihre Gleichung

$$1)\quad f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem O xyz gegeben, ferner eine Ebene durch die Gleichung

$$2)\quad u = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

so wollen wir die Frage erörtern:

Welchen Bedingungen müssen die Koeffizienten α, β, γ, δ in der Gleichung 2) der Ebene genügen, wenn diese Ebene die gegebene Oberfläche 1) in einer gleichseitigen Hyperbel bezw. zwei aufeinander senkrecht stehenden Geraden schneiden soll?

Bei Beantwortung dieser Frage schliessen wir uns an O. Hesses Untersuchungen über ebene Schnitte von Oberflächen 2. Ordnung[1]) an. Dabei ändern wir die Koeffizientenbezeichnung in Hesses Gleichungen so ab, dass sie mit der unsrigen in den Gleichungen 1) und 2) übereinstimmt.

---

[1]) O. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, 3. Aufl., 1876, S. 395 ff. (28. Vorlesung).

Hesse gelangt durch folgende Betrachtung zur Unterscheidung der verschiedenen Arten von Kegelschnitten, welche durch die Ebene 2) auf der Fläche 1) ausgeschnitten werden, und damit u. a. zur Aufstellung der Bedingung für Hyperbelschnitte:

Sieht man 2) als die Normalform der Gleichung der Schnittebene an, mit anderen Worten: ist

3) $$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

so bedeuten die Substitutionen

4) $$\begin{cases} x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z \\ y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z \\ z = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z \end{cases}$$

unter der gleichzeitigen Bedingung

5) $$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

eine konzentrische Drehung des Koordinatensystems in der Weise, dass die YZ-Ebene des neuen Systems der schneidenden Ebene 2) parallel wird; denn diese erhält, wie sich aus 2) und 4) mit Berücksichtigung von 3) und 5) ergibt, im neuen System die Gleichung

6) $$X + \delta = 0 \text{ oder } X = -\delta.$$

Setzt man diesen konstanten Wert für X in 4) ein und führt die Substitutionen 4) in der Gleichung der Oberfläche 1) aus, so erhält man die in Y und Z quadratische Gleichung der Schnittkurve von 1) und 2), welche also stets ein Kegelschnitt ist[1]).

Nun ist es, wie Hesse beweist, immer möglich, die noch willkürlichen Koeffizienten α', β', γ', α'', β'', γ'' in den Substitutionsgleichungen 4) so zu bestimmen, dass in der Gleichung des zu untersuchenden Kegelschnittes der Koeffizient von YZ gleich Null wird. Durch diese besondere Wahl der Lage der Y- und Z-Achse des neuen Systems erhält man die Gleichung der Schnittkurve, bezogen auf ein ihren Hauptachsen paralleles Koordinatensystem. In diesem Falle genügt

[1]) Vergl. Schlömilch, S. 57; Hoppe, S. 64; Krewer, S. 75.

die Kenntnis der Koeffizienten der quadratischen Glieder zur Feststellung, ob der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist. Diese Koeffizienten, die Hesse mit λ_1 und λ_2 bezeichnet, sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$7)\quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \alpha \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \beta \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus, dass $\Delta(\lambda)$, also auch λ_1 und λ_2 von δ völlig unabhängig sind, ergibt sich der Satz:

Parallele Ebenen schneiden eine Oberfläche 2. O. in ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitten[1]).

Sollen diese Kegelschnitte Hyperbeln sein, so müssen λ_1 und λ_2 entgegengesetztes Vorzeichen haben.

So weit Hesse.

Wir gewinnen hieraus sehr leicht die Bedingung für gleichseitig-hyperbol. Schnitte. Für diese nämlich muss

$$8)\quad \underline{\lambda_1 = -\lambda_2} \text{ oder } \underline{\lambda_1 + \lambda_2 = 0}^{2})$$

sein.

---

[1]) Vergl. Schlömilch, S. 57; Hoppe, S. 65.

[2]) Statt mit Hesse auf ein den Hauptachsen der Schnittkurve paralleles Koordinatensystem zu transformieren, hätten wir uns auch darauf beschränken können, die Lage des neuen Systems O/XYZ so zu wählen, dass die YZ-Ebene der Ebene 2) parallel wird. Dann ist die Gleichung der Schnittkurve 1)×2) von der Form: $BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EY + 2FZ + G = 0$, wo

$B = a_{11}\alpha'^2 + a_{22}\beta'^2 + a_{33}\gamma'^2 + 2a_{23}\beta'\gamma' + 2a_{31}\gamma'\alpha' + 2a_{12}\alpha'\beta'$,

$C = a_{11}\alpha''^2 + a_{22}\beta''^2 + a_{33}\gamma''^2 + 2a_{23}\beta''\gamma'' + 2a_{31}\gamma''\alpha'' + 2a_{12}\alpha''\beta''$ usw.

ist, und die Bedingung dafür, dass diese Kurve eine gleichseitige Hyperbel ist, lautet:

$$B + C = a_{11}(\alpha'^2 + \alpha''^2) + a_{22}(\beta'^2 + \beta''^2) + a_{33}(\gamma'^2 + \gamma''^2) + 2a_{23}(\beta'\gamma' + \beta''\gamma'') + 2a_{31}(\gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'') + 2a_{12}(\alpha'\beta' + \alpha''\beta'') = 0,$$

Um 8) als Gleichung zwischen den Koeffizienten der Oberflächengleichung 1) und der Ebenengleichung 2) darzustellen, entwickeln wir $\Delta(\lambda)$ nach Maclaurin[1]):

$$9) \qquad \Delta(\lambda) = \Delta(0) + \Delta'(0) \cdot \lambda + \frac{1}{2} \Delta''(0) \cdot \lambda^2,$$

worin

$\Delta(0) \quad [\Delta(\lambda)]_{\lambda=0}$, $\Delta'(0) = [\Delta'(\lambda)]_{\lambda=0}$, $\Delta''(0) = [\Delta''(\lambda)]_{\lambda=0}$

ist und

$$\Delta'(\lambda) = \frac{d\,\Delta(\lambda)}{d\lambda}, \quad \Delta''(\lambda) \quad \frac{d^2\,\Delta(\lambda)}{d\lambda^2}.$$

Bekanntlich ist

$$\Delta'(\lambda) = -\{\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}\},$$

wo Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{33} folgende Bedeutung haben:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} & \beta \\ a_{32} & a_{33}-\lambda & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = -(a_{33}-\lambda)\beta^2 - (a_{22}-\lambda)\gamma^2 + 2a_{23}\beta\gamma,$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{13} & \alpha \\ a_{31} & a_{33}-\lambda & \gamma \\ \alpha & \gamma & 0 \end{vmatrix} = -(a_{11}-\lambda)\gamma^2 - (a_{33}-\lambda)\alpha^2 + 2a_{31}\gamma\alpha,$$

$$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \alpha \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} = -(a_{22}-\lambda)\alpha^2 - (a_{11}-\lambda)\beta^2 + 2a_{12}\alpha\beta.$$

---

ist also identisch mit 13), da zwischen den Grössen α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ als Richtungskosinus der Achsen des rechtwinkligen Koordinatensystems O/xyz in bezug auf das ebenfalls rechtwinklige System O/XYZ die Relationen bestehen:

$$\alpha'^2+\alpha''^2 = 1-\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2, \quad \beta'^2+\beta''^2 = 1-\beta^2 = \gamma^2+\alpha^2, \quad \gamma'^2+\gamma''^2 = 1-\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2$$
$$\beta'\gamma'+\beta''\gamma'' = -\beta\gamma, \qquad \gamma'\alpha'+\gamma''\alpha'' = -\gamma\alpha, \qquad \alpha'\beta'+\alpha''\beta'' = -\alpha\beta.$$

Aber wir gelangen auf diesem Wege nicht zu der zweiten Bedingung 14), welche zur Feststellung derjenigen Flächen 2. Ordnung, welche keine gleichseitigen Hyperbelschnitte zulassen, besonders geeignet ist.

[1]) Vergl. O. Staude: Über die Bedingung der Kreisschnitte der Flächen 2. O., Archiv d. Math. u. Physik, III. Reihe, VII. 3. Heft, S. 185, 186.

Daraus folgt:

10) $\Delta'(0) \quad (a_{22} + a_{33})\,\alpha^2 + (a_{33} + a_{11})\,\beta^2 + (a_{11} + a_{22})\gamma^2 - 2\,(a_{23}\beta\gamma + a_{31}\gamma\alpha + a_{12}\alpha\beta),$

ferner

$$\Delta''(\lambda) = -2\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = -2,$$

also auch

11) $$\Delta''(0) = -2.$$

Mit Benutzung dieses Wertes für $\Delta''(0)$ lautet die Entwickelung der Determinante:

9′) $$\Delta(\lambda) = -\lambda^2 + \Delta'(0)\,.\,\lambda + \Delta(0) = 0.$$

Nach einem Satze der Algebra ist hierin:

12) $$\Delta'(0) = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad \Delta(0) = -\lambda_1\,.\,\lambda_2.$$

Mit Rücksicht auf 8) gelangen wir hiernach zu folgenden beiden Bedingungen für gleichseitige Hyperbelschnitte:

13′) $$\underline{\Delta'(0) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0}$$

und

14′) $$\Delta(0) = \lambda_1^2 = \lambda_2^2 > 0,$$

oder ausführlich geschrieben:

13) $$\underline{(a_{22} + a_{33})\,\alpha^2 + (a_{33} + a_{11})\,\beta^2 + (a_{11} + a_{22})\,\gamma^2 - 2\,(a_{23}\beta\gamma + a_{31}\gamma\alpha + a_{12}\alpha\beta) = 0}$$

und

14)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \alpha \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \beta \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = -\alpha^2\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23})^2 - \beta^2\,(a_{33}\,a_{11} - a_{31}^2) - \gamma^2\,(a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2) + 2\beta\gamma\,(a_{11}\,a_{23} - a_{12}\,a_{31}) + 2\gamma\alpha\,(a_{22}\,a_{31} - a_{23}\,a_{12}) + 2\alpha\beta\,(a_{33}\,a_{12} - a_{31}\,a_{23}) > 0.$$

§ 11.

Geometrische Deutung der Gleichung 13).

Nach § 9, S. 102 sind die Koeffizienten α, β, γ, δ in der Gleichung 2) der Schnittebene die homogenen Koordinaten dieser Ebene [1]).

Unsere Bedingungsgleichung:

$$13) \quad (a_{22}+a_{33})\alpha^2+(a_{33}+a_{11})\beta^2+(a_{11}+a_{22})\gamma^2 - 2(a_{23}\beta\gamma+a_{31}\gamma\alpha+a_{12}\alpha\beta)=0$$

stellt demnach als Gleichung zwischen Ebenenkoordinaten den Ort aller derjenigen Ebenen dar, welche der Bedingung 8):

$$\lambda_1+\lambda_2=0$$

genügen, mit andern Worten:

Gleichung 13) ist die Gleichung des geometrischen Ortes aller hyperzyklischen Ebenen der Oberfläche 2. Ordnung 1).

Nach S. 108, II. 4 stellt dieselbe einen unendlich fernen Kegelschnitt dar, bzw. das durch einen solchen bestimmte Ebenenbündel, welches aus ∞^1 Systemen von ∞^1 parallelen Ebenen besteht. Das gibt zunächst den Satz:

Ist eine Ebene gegeben, welche eine Oberfläche 2. Ordnung in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet, so schneiden alle ihr parallelen Ebenen die Oberfläche ebenfalls in gleichseitigen Hyperbeln, vergl. S. 117.

Da es nach Obigem ∞^1 derartiger Systeme paralleler hyperzyklischer Ebenen gibt, so gehen

[1]) Die Bedingung 3):

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

bedeutet keine Beschränkung, da sie durch Multiplikation der ganzen Gleichung 2) mit einem beliebigen Faktor $\varkappa$, welche die Normalform der Gleichung der Ebene in die allgemeine Form überführt, aufgehoben wird.

durch jeden Punkt des Raumes ∞^1 Ebenen, welche die gegebene Oberfläche 1) in gleichseitigen Hyperbeln schneiden. Wählt man den Punkt als Koordinatenanfangspunkt — worin keine Beschränkung liegt, da wir die Fläche durch die allgemeine Form ihrer Gleichung gegeben haben —, so genügen die Koordinaten dieser ∞^1 durch ihn gehenden hyperzyklischen Ebenen den beiden Gleichungen:

$$15) \quad (a_{22}+a_{33})\,\alpha^2+(a_{33}+a_{11})\,\beta^2+(a_{11}+a_{22})\,\gamma^2 - 2(a_{23}\beta\gamma+a_{31}\gamma\alpha+a_{12}\alpha\beta)=0,\ \delta=0;$$

die Ebenen umhüllen also nach S. 110, I. 16 einen Kegel zweiten Grades.

Beziehen wir die Oberfläche 2. O. auf ein ihren Hauptachsen paralleles Koordinatensystem, so dass ihre Gleichung die Form:

$$1') \quad a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

annimmt, was durch eine Drehung des Koordinatensystems stets zu erreichen ist, so ist der geometrische Ort aller durch O gehenden hyperzyklischen Ebenen durch die beiden Gleichungen:

$$16) \quad \underline{(a_{22}+a_{33})\,\alpha^2+(a_{33}+a_{11})\,\beta^2+(a_{11}+a_{22})\,\gamma^2=0,\ \delta=0}$$

dargestellt, da $a_{23}=a_{31}=a_{12}=0$ wird.

Berücksichtigt man, dass hierbei O noch jede beliebige Lage haben kann, so erhält man aus 16) im Hinblick auf S. 110, B. I 17 den wichtigen Satz:

Alle Ebenen, welche durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen und eine gegebene Oberfläche 2. Ordnung in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, umhüllen einen Kegel 2. Grades, dessen Achsen und Achsenebenen jenen der gegebenen Fläche parallel sind.

Ferner:

Alle Ebenen, welche eine gegebene Oberfläche 2. Ordnung in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, sind den Tangentialebenen eines Kegels parallel, dessen Achsen und Achsenebenen jenen der gegebenen Fläche parallel sind.

Es kommt jetzt darauf an, zu untersuchen, welche von den 14 verschiedenen Oberflächen 2. O.[1]) überhaupt gleichseitig-hyperbol. Schnitte zulassen, und in welcher Weise die erste Gleichung 16)[2]) in den verschiedenen Fällen modifiziert wird.

§. 12.

Allgemeine Diskussion der Gleichungen 16). Feststellung derjenigen Flächen 2. Ordnung, welche von einer Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten werden können.

Die durch die Gleichung:

$$1') \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

gegebenen Oberflächen 2. O. können wir folgendermassen klassifizieren[3]):

---

[1]) Mit Einschluss der imaginären und zerfallenden Flächen.

[2]) Da, wie erwähnt, die allgemeinste Gleichung einer Oberfläche 2. O. durch eine Koordinatentransformation immer auf die Form 1') gebracht werden kann, so genügt es, wenn wir im folgenden statt der allgemeineren Gleichungen 15) die spezielleren 16), welche für die Diskussion mehr geeignet sind, der Untersuchung zugrunde legen.

[3]) Bei der Symmetrie der Gleichung 1') ist es gleichgültig, welche von den Koeffizienten in den Fällen A) II., B) und C) positiv, negativ oder gleich Null vorausgesetzt werden.

A) $a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0,\ a_{33} \neq 0.$

I.

$a_{11} > 0,\ a_{22} > 0,\ a_{33} > 0$: { Reelles Ellipsoid. Imaginäres Ellipsoid. Imaginärer Kegel.

II.

$a_{11} > 0,\ a_{22} \gtrless 0,\ a_{33} < 0$: { Einschaliges Hyperboloid. Zweischaliges Hyperboloid. Reeller Kegel.

B) $a_{11} = 0;\ a_{22} \neq 0,\ a_{33} \neq 0.$

I.

$a_{11} = 0;\ a_{22} > 0,\ a_{33} > 0$: { Elliptisches Paraboloid. Elliptischer Zylinder. Imaginärer Zylinder. Imaginäres Ebenenpaar.

II.

$a_{11} = 0;\ a_{22} > 0,\ a_{33} < 0$: { Hyperbolisches Paraboloid. Hyperbolischer Zylinder. Reelles Ebenenpaar.

C). $a_{11} = 0,\ a_{22} = 0;\ a_{33} \neq 0.$

$a_{11} = 0,\ a_{22} = 0;\ a_{33} > 0$: { Parabolischer Zylinder.

In den Fällen A) I, B) I und C) wird die erste Gleichung 16):

$$16') \quad (a_{22} + a_{33})\alpha^2 + (a_{33} + a_{11})\beta^2 + (a_{11} + a_{22})\gamma^2 = 0$$

imaginär, d. h.: *das Ellipsoid, das elliptische Paraboloid, der elliptische und der parabolische Zylinder und die vier imaginären Flächen lassen keine gleichseitigen Hyperbelschnitte zu.*

Von den 14 Flächen 2. O. bleiben also nur die 6 Flächen der beiden Gruppen A) II und B) II zu untersuchen.

Schreibt man 1') homogen:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0$$

und setzt $t = 0$, so erhält man die *Schnittkurve:*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0,\ t = 0$$

der Oberfläche 1') mit der unendlich fernen Ebene, welche für die 6 Flächen, auf denen gleichseitige Hyperbeln liegen können, *ein reeller eigentlicher oder zerfallender Kegelschnitt ist.*

Eine weitere gemeinsame Eigentümlichkeit dieser 6 Flächen, durch die sie sich von den 8 Flächen der Gruppen A) I, B) I und C) grundsätzlich unterscheiden, ist die, dass für sie unter Umständen:

17) $$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

werden kann. Wir nennen sie dann *„gleichseitig"*, vergl. S. 54, 55.

In diesem Falle werden die Gleichungen 16) des Ortskegels der hyperzyklischen Ebenen zu:

18) $$a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 = 0,\ \delta = 0.$$

Unter dieser Voraussetzung betrachten wir die 6 Flächen A) II und B) II noch etwas näher.

I.

Die beiden gleichseitigen Hyperboloide und der gleichseitige Kegel 2. Grades.

Die drei Flächen der Gruppe A) II besitzen einen endlichen bestimmten Mittelpunkt. Es ist daher, da $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$ ist, stets möglich, ihre Gleichung 1') durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems entsprechend den Substitutionen:

19) $x = x' - \frac{a_{14}}{a_{11}},\ y = y' - \frac{a_{24}}{a_{22}},\ z = z' - \frac{a_{34}}{a_{33}}$

auf die Form:

20) $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \mu = 0$$

zu bringen, wobei die Bedingung der Gleichseitigkeit:

17) $$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

unverändert erhalten bleibt.

Sieht man in Gleichung 20) die Koeffizienten a_{11}, a_{22}, a_{33} als konstant, μ dagegen als unbeschränkt veränderlich an, so bedeutet dieselbe zwei Scharen ähnlicher gleichseitiger Hyperboloide mit gemeinsamen Asymptotenkegel, u. zw. wenn $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} < 0$ vorausgesetzt wird,

für $\mu > 0$ eine Schar ähnlicher einschaliger Hyperboloide,

für $\mu < 0$ die zugehörige Schar konjugierter zweischaliger Hyperboloide,

für $\mu = 0$ den ebenfalls gleichseitigen gemeinsamen Asymptotenkegel der beiden Scharen:

21) $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0;\ a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0.$$

Alle diese Flächen 20) werden nach dem Vorigen von jeder Ebene, welche einer Tangentialebene des Kegels:

18) $$a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 = 0,\ \delta = 0$$

parallel ist, in gleichseitigen Hyperbeln, bzw. Paaren zu einander normaler Geraden geschnitten; d. h. jede Tangentialebene des unendlich fernen Kegelschnittes:

18′) $$a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 = 0$$

ist gemeinsame hyperzyklische Ebene sämtlicher Flächen 20).

Wie aus den Gleichungen hervorgeht[1]), ist der unendlich ferne Kegelschnitt 18′) die Reziprokalfläche

[1]) Mit Bezug auf die Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ hat die Polarebene eines Punktes x, y, z die Gleichung: $x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z' - 1 = 0$,

des Asymptotenkegels 21), bezogen auf eine diesem konzentrische Kugel.

Demnach ist der über 18′) errichtete Kegel 18) der Polarkegel des Kegels 21) und umgekehrt[1]).

Bekanntlich hat die Berührungsebene im Punkte x_0, y_0, z_0, t_0 eines Kegels:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 \quad 0$$

die Gleichung:

$$a_{11}x_0 \cdot x + a_{22}y_0 \cdot y + a_{33}z_0 \cdot z = 0,$$

und demnach nach S. 102 die Koordinaten:

$$\alpha_0 = a_{11}x_0,\ \beta_0 = a_{22}y_0,\ \gamma_0 = a_{33}z_0,\ \delta_0 = 0^2).$$

Die duale Betrachtung ergibt, dass der Berührungspunkt der Tangentialebene α_0, β_0, γ_0, δ_0 des unendlich fernen Kegelschnittes:

$$18') \qquad a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 = 0$$

die Gleichung:

$$a_{11}\alpha_0 \cdot \alpha + a_{22}\beta_0 \cdot \beta + a_{33}\gamma_0 \cdot \gamma = 0$$

und die Koordinaten:

$$x_0 = a_{11}\alpha_0,\ y_0 = a_{22}\beta_0,\ z_0 = a_{33}\gamma_0,\ t_0 = 0$$

hat; d. h. zwischen den Koordinaten α, β, γ, δ irgendeiner Tangentialebene des gegebenen Kegelschnittes

wenn x', y', z' die laufenden Koordinaten sind. Mithin bestehen zwischen den Koordinaten des Punktes und denen seiner Polarebene die Relationen: $x = -\alpha$, $y = -\beta$, $z = -\gamma$, vergl. S. 101. Diese Relationen vermitteln den Übergang von der Gleichung eines gegebenen beliebigen Punktgebildes zu der des polarreziproken Ebenengebildes.

[1]) Vergl. Salmon-Fiedler, Anal. Geometrie des Raumes, Art. 125 u. 127; 3. Aufl. (1879). Desgl. O. Hesse, Vorles. über anal. Geom. d. Raumes, 14. Vorles.; 3. Aufl. (1876), S. 169. Bezüglich der Gleichung 22) vergl. Salmon-Fiedler, a. a. O., Art. 127 u. 151.

[2]) Vergl. Salmon-Fiedler, a. a. O., Art. 90. Desgl. O. Hesse, a. a. O., S. 168.

und denen ihres Berührungspunktes bestehen allgemein die Relationen:

$$\alpha = \frac{x}{a_{11}},\ \beta = \frac{y}{a_{22}},\ \gamma = \frac{z}{a_{33}},\ 0 = t.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die gegebene Gleichung unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Bedingung $t = 0$, die für alle Punkte des Kegelschnittes gilt, erhält man seine Gleichung in Punktkoordinaten:

22′) $$\frac{x^2}{a_{11}} + \frac{y^2}{a_{22}} + \frac{z^2}{a_{33}} = 0,\ t = 0\ ^1).$$

Sieht man von der Bedingung $t = 0$ ab, so ist:

22) $$\frac{x^2}{a_{11}} + \frac{y^2}{a_{22}} + \frac{z^2}{a_{33}} = 0$$

die Gleichung des von O aus über dem unendlich fernen Kegelschnitt 18′) errichteten Kegels 18) in Punktkoordinaten.

Fassen wir dies alles zusammen, so gelangen wir zu folgenden Sätzen:

1. Der geometrische Ort aller hyperzyklischen Ebenen der Doppelschar gleichseitiger Hyperboloide:

20) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \mu = 0$
$(a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0)$

ist ein unendlich ferner Kegelschnitt:

18′) $a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + = 0,$

welcher mit Bezug auf eine den gegebenen Hyperboloiden konzentrische Kugel ihrem gemeinsamen Asymptotenkegel:

21) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0$

polarreziprok ist.

2. Alle Ebenen, welche die Doppelschar gleichseitiger Hyperboloide 20) in gleichseitigen Hyperbeln)*

---

[1]) Vergl. O. Hesse, a. a. O., 15. Vorles., S. 176.

*) Bedeutet im folgenden stets: „bzw. Paaren aufeinander senkrecht stehender Geraden“ oder „oder in einem rechten Winkel“, erinnert also daran, dass unter den gleichseitig-hyperbol. Schnitten zerfallende vorkommen.

schneiden, stehen auf den Erzeugenden des Asymptotenkegels 21) senkrecht, oder:

3. Alle Ebenen, welche die Doppelschar gleichseitiger Hyperboloide 20) in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, sind den Tangentialebenen des Kegels*

$$22) \qquad \frac{x^2}{a_{11}} + \frac{y^2}{a_{22}} + \frac{z^2}{a_{33}} = 0$$

parallel, welcher der Polarkegel des Asymptotenkegels der gegebenen Flächen ist[1]).

II.

Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid, der gleichseitige Zylinder und das Ebenenpaar, dessen Ebenen aufeinander senkrecht stehen.

Soll die Gleichung 1') eine Fläche der Gruppe B) II darstellen, so muss $a_{11} = 0$ sein; die Gleichung reduziert sich also auf:

$$1'') \quad a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Durch die Substitutionen:

$$23) \qquad \begin{cases} x = x' - \dfrac{a_{22}a_{33}a_{44} - a_{33}a_{24}^2 - a_{22}a_{34}^2}{2a_{14}a_{22}a_{33}} \\ y = y' - \dfrac{a_{24}}{a_{22}} \\ z = z' - \dfrac{a_{34}}{a_{33}} \end{cases}$$

geht 1'') über in:

$$a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{14}x' = 0$$

oder:

$$a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + \left(a_{44} - \frac{a_{24}^2}{a_{22}} - \frac{a_{34}^2}{a_{33}}\right) = 0,$$

je nachdem $a_{14} \neq 0$ oder $a_{14} = 0$ ist.

Im ersteren Falle stellt die Gleichung ein Paraboloid dar, im letzteren Falle einen Zylinder oder, wenn:

$$a_{44} = \frac{a_{24}^2}{a_{22}} + \frac{a_{34}}{a_{33}},$$

[1]) Vergl. S. 180, 182.

also $a_{22}\,a_{33}\,a_{44} - a_{33}\,a_{24}^2 - a_{22}\,a_{34}^2 = 0$
ist, ein Ebenenpaar, nämlich bei gleichen Werten a_{22}, a_{33} in den drei Gleichungen die Richtebenen des Paraboloides, bzw. die Asymptotenebenen des Zylinders.

In allen drei Fällen berühren die durch O′ gehenden hyperzyklischen Ebenen denselben Kegel, vergl. 16′):

24) $(a_{22} + a_{33})\,\alpha^2 + a_{33}\,\beta^2 + a_{22}\,\gamma^2 - 0,\ \delta = 0,$

dessen Achsen und Achsenebenen mit denen der gegebenen Flächen zusammenfallen, und dessen Spitze im Falle des Paraboloides in dem Scheitelpunkte desselben liegt.

Die Bedingung 17) für gleichseitige Flächen wird hier, da $a_{11} = 0$ ist, zu:

25) $a_{22} + a_{33} = 0$ oder $a_{33} = -a_{22}$.

Bei dieser Annahme wird aus 24), vergl. auch 18):

$$-a_{22}(\beta^2 - \gamma^2) \quad 0,\ \delta = 0$$

oder:

26) $\underline{\beta^2 - \gamma^2 = 0,\ \delta = 0.}$

Die Gleichungen der drei Flächen nehmen, wenn wir statt x′, y′, z′ wieder x, y, z schreiben und zur Abkürzung:

$$\frac{a_{14}}{a_{22}} = \nu,$$

$$a_{44} - \frac{a_{14}^2}{a_{22}} - \frac{a_{34}^2}{a_{33}} = \mu$$

setzen, unter der Voraussetzung 25) die Gestalt an:

27) $y^2 - z^2 + 2\nu x = 0,$

28) $y^2 - z^2 + \mu \quad = 0,$

29) $y^2 - z^2 \quad = 0.$

Betrachtet man in 27) ν als variabel, so stellt die Gleichung für $\nu \gtrless 0$ je eine Schar ähnlicher und ähnlich gelegener gleichseitiger hyperbol. Paraboloide dar und für $\nu = 0$ die gemeinsamen Richtebenen 29) beider Scharen, welche auf einander senkrecht stehen.

Sieht man ebenso in 28) μ als variabel an, so bedeutet die Gleichung für $\mu \gtrless 0$ je eine Schar ähnlich

liegender gleichseitiger hyperbol. Zylinder und für $\mu = 0$ die gemeinsamen Asymptotenebenen 29) beider Scharen, welche mit den Richtebenen der Paraboloide 27) identisch sind [1]).

Hiernach liegt es nahe, das Ebenenpaar 29) zu dem Asymptotenkegel 21) in Parallele zu stellen, wie wir es bereits auf S. 48 ff. getan haben.

In der Tat entspricht die Bedeutung der Asymptotenebenen 29) für die Zylinderflächen 28), wie wir an der genannten Stelle ausgeführt haben, genau derjenigen des Asymptotenkegels 21) für die Hyperboloide 20).

Etwas anders verhält es sich mit den Richtebenen der hyperbolischen Paraboloide 27), da sie die zugehörigen Flächen 27) nicht nur in der unendlich fernen Ebene, sondern auch in der endlichen Scheitelebene in zwei aufeinander senkrecht stehenden Geraden schneiden.

Trotzdem gelten, da die Richtebenen der Paraboloide 27) bei der gewählten Gleichungsform mit den Asymptotenebenen der Zylinder 28) zusammenfallen, auch für die Richtebenen Sätze, die den für den Asymptotenkegel 21) gültigen vollkommen analog sind [2]).

Wir könnten dieselben als spezielle Ausartungen der auf S. 127 angegebenen Sätze unmittelbar hinschreiben, ziehen es jedoch vor, sie aus den Gleichungen 26) und 29) besonders zu entwickeln.

---

[1]) Im Gegensatz zu den gleichseitigen Hyperboloiden sind alle gleichseitigen hyperbol. Paraboloide und Zylinder untereinander ähnliche Figuren. Ihnen allen entspricht als zerfallende Fläche das Paar auf einander senkrecht stehender Ebenen.

[2]) Wir übertragen daher die Bezeichnung „Asymptotenebenen“ auch auf die Richtebenen der Paraboloide 27), um eine kurze gemeinsame Bezeichnung zu haben.

Zunächst erkennt man, dass die Flächen 27), 28) und 29) alle hyperzyklischen Ebenen gemeinsam haben, und dass diese zwei unendlich ferne Punkte:

$$26') \qquad \beta^2 - \gamma^2 = 0$$

umhüllen, welche in der yz-Ebene in zwei zu einander senkrechten Richtungen gelegen sind. Dieses unendlich ferne Punktepaar 26') ist den Asymptotenebenen 29) der gegebenen Flächen polarreziprok mit Bezug auf eine Kugel, deren Zentrum der gemeinsame Scheitelpunkt der Paraboloide 27) ist. Da die Asymptotenebenen 29) auf einander senkrecht stehen, so liegt der Pol einer jeden von ihnen in der andern, und zwar sind diese Pole 26') die unendlich fernen Punkte der beiden Scheitelstrahlen:

$$y^2 - z^2 = 0, \; x = 0$$

der Paraboloide 27). Ihre Gleichungen in Punktkoordinaten lauten daher:

$$30') \qquad x = 0, \; y^2 - z^2 = 0, \; t = 0.$$

Für die durch O gehenden hyperzyklischen Ebenen:

$$26) \qquad \beta^2 - \gamma^2 = 0, \; \delta = 0$$

folgt hieraus, dass sie zwei Ebenenbüschel bilden, deren Achsen die genannten, auf einander senkrecht stehenden Scheitelstrahlen:

$$y^2 - z^2 = 0, \; x = 0$$

sind. Ihre Gleichungen in Punktkoordinaten sind demnach:

$$30) \qquad \underline{y + z + \lambda x = 0} \text{ und } \underline{y - z + \lambda x = 0}$$

bei unbeschränkt variablem λ.

Die Ebene $x = 0$ nimmt eine ausgezeichnete Stellung ein, da sie beiden Ebenenbüscheln 30) gemeinsam angehört. Es ist die Scheitelebene der Paraboloide 27).

Weil die Achsen der Ebenenbüschel 30) in je einer der Asymptotenebenen 29) liegen, so steht jede hyperzyklische Ebene der gegebenen Flächen auf einer der beiden Asymptotenebenen 29) senkrecht.

Wir gewinnen daher folgende allgemeine Sätze, welche die auf S. 21, 22, 51, 52 entwickelten in sich enthalten:

1. Der geometrische Ort aller hyperzyklischen Ebenen der gleichseitigen hyperbolischen Paraboloide:

27) $y^2 - z^2 + 2\nu x = 0;\ (-\infty < \nu < +\infty)$

und der gleichseitigen hyperbolischen Zylinder:

28) $y^2 - z^2 + \mu = 0;\ (-\infty < \mu < +\infty)$

ist ein unendlich fernes Punktepaar:

$$\beta^2 - \gamma^2 = 0,$$

welches mit Bezug auf eine um den gemeinsamen Scheitelpunkt der gegebenen Paraboloide beschriebene Kugel dem ausgezeichneten Ebenenpaar:

29) $y^2 - z^2 = 0,$

in welches die gegebenen Flächen für $\nu = 0$, bzw. $\mu = 0$ ausarten, polarreziprok ist.

2. Alle Ebenen, welche die gleichseitigen Paraboloide 27) und die gleichseitigen Zylinder 28) in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, stehen auf einer der beiden ausgezeichneten Ebenen 29) senkrecht, oder:*

3. Alle Ebenen, welche die gleichseitigen Paraboloide 27) und die gleichseitigen Zylinder 28) in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, sind den Ebenen eines der beiden Ebenenbüschel:*

30) $y + z + \lambda x = 0,\ y - z + \lambda x = 0$

parallel, deren Achsen die aufeinander senkrecht stehenden Scheitelstrahlen:

$$x = 0,\ y^2 - z^2 = 0$$

der gegebenen gleichseitigen Paraboloide sind.

Nachdem in Kapitel V, § 11 und 12, die Hauptsätze über gleichseitig-hyperbol. Schnitte von Oberflächen 2. O. in ihrer allgemeinsten Form hergeleitet sind, sollen im folgenden die einzelnen Flächen einer eingehenderen Untersuchung unterzogen werden.

Der Einfachheit halber mögen ihre Gleichungen in der Normalform, d. h. als Hauptachsengleichungen, gegeben sein, da es sich in erster Linie darum handelt, zu ermitteln, welche Modifikationen die allgemeinen Sätze für die verschiedenen Grössenverhältnisse der Hauptachsen der gegebenen Flächen erleiden.

Obgleich wir in § 12 bereits allgemein entschieden haben, welche von den vierzehn verschiedenen Oberflächen 2. O. gleichseitige Hyperbelschnitte zulassen, führen wir diese Untersuchung an den Normalformen ihrer Gleichungen noch einmal aus, um die Bedeutung der bisher nicht benutzten zweiten Form der Bedingung für gleichseitig-hyperbol. Schnitte 14) zu zeigen.

VI. Kapitel.

§ 13.

Anwendung der Bedingungen I3) und I4) auf die Normalformen der Gleichungen der Oberflächen 2. Ordnung.

Die Gleichungen der gegebenen Flächen seien:

I.
1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 = 0$: *Reelles Ellipsoid.*
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 0$: *Imaginärer Kegel.*
3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1 = 0$: *Imaginäres Ellipsoid.*

II.
4. $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 = 0$: *Elliptischer Zylinder.*
5. $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 0$: *Imaginäres Ebenenpaar.*
6. $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1 = 0$: *Imaginärer Zylinder.*
7. $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2x = 0$: *Elliptisches Paraboloid.*

III.
8. $\frac{z^2}{c^2}+2x = 0$: *Parabolischer Zylinder.*

IV.
9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1 = 0$: *Einschaliges Hyperboloid.*
10. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 0$: *Reeller Kegel 2. Ordnung.*
11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1 = 0$: *Zweischaliges Hyperboloid.*

V. $\begin{cases} 12. & \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0: \textit{ Hyperbolischer Zylinder.} \\ 13. & \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0: \textit{ Reelles Ebenenpaar.} \\ 14. & \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0: \textit{ Hyperbolisches Paraboloid.} \end{cases}$

Mit Rücksicht auf die Koeffizienten der quadratischen Glieder lassen sich diese 14 Flächen in 5 Gruppen anordnen, welche mit den auf S. 123 angegebenen abgesehen von der Reihenfolge übereinstimmen.

Die Werte der Koeffizienten a_{ik} in den einzelnen Gruppen, so weit sie für die Bedingungsgleichungen 13) und 14) in Betracht kommen, sind:

I.: $a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{22} = \frac{1}{b^2}$, $a_{33} = \frac{1}{c^2}$; $a_{23} = 0$, $a_{31} = 0$, $a_{12} = 0$.

II.: $a_{11} = 0$, $a_{22} = \frac{1}{b^2}$, $a_{33} = \frac{1}{c^2}$; „ „ „

III.: $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = \frac{1}{c^2}$; „ „ „

IV.: $a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{22} = \frac{1}{b^2}$, $a_{33} = -\frac{1}{c^2}$; „ „ „

V.: $a_{11} = 0$, $a_{22} = \frac{1}{b^2}$, $a_{33} = -\frac{1}{c^2}$; „ „ „

Durch Einsetzen dieser Werte in die linke Seite der Ungleichung 14):

$$\Delta(o) = -\lambda_1\lambda_2 = -(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)\alpha^2 - (a_{33}a_{11} - a_{31}^2)\beta^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\gamma^2 + 2[(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{31})\beta\gamma + (a_{22}a_{31} - a_{23}a_{12})\gamma\alpha + (a_{33}a_{12} - a_{31}a_{23})\alpha\beta]$$

erhält man Ausdrücke, von deren Wert es abhängt, welche Arten von Kegelschnitten auf der gegebenen Fläche liegen; denn für ellipt. Schnitte müssen die Vorzeichen von λ_1 und λ_2 gleich sein, für hyperbol. Schnitte verschieden, für parabol. Schnitte endlich muss entweder λ_1 oder λ_2 gleich Null sein, d. h.

$\Delta(o) < 0$ bedeutet elliptische Schnitte,
$\Delta(o) = 0$ „ parabolische „ ,
$\Delta(o) > 0$ „ hyperbolische „ .

Auf die Gruppen I—V angewendet gibt das:

I. $$\Delta(o) = -\left[\frac{\alpha^2}{b^2c^2} + \frac{\beta^2}{c^2a^2} + \frac{\gamma^2}{a^2b^2}\right] < 0.$$

Die Flächen der ersten Gruppe lassen nur elliptische Schnitte zu.

II. $$\Delta(o) = -\frac{\alpha^2}{b^2c^2} \leqq 0.$$

Die Flächen der zweiten Gruppe lassen ellipt. und parabol. Schnitte zu, die letzteren jedoch nur für $\alpha = 0$, d. h. parallel der x-Achse. Hyperbol. Schnitte fehlen.

III. $$\Delta(o) = 0,$$

Der parabolische Zylinder lässt ausschliesslich parabol. Schnitte zu.

IV. $$\Delta(o) = \frac{\alpha^2}{b^2c^2} + \frac{\beta^2}{c^2a^2} - \frac{\gamma^2}{a^2b^2} \leqq 0.$$

Auf den Hyperboloiden und dem reellen Kegel liegen alle drei Arten von Kegelschnitten.

V. $$\Delta(o) = \frac{\alpha^2}{b^2c^2} \geqq 0.$$

Die drei Flächen der fünften Gruppe lassen nur hyperbol. und parabol., dagegen keine elliptischen Schnitte zu.

Die parabol. Schnitte entsprechen dem Werte $\alpha = 0$, liegen also parallel der x-Achse.

Für das Ebenenpaar arten die Hyperbeln in zwei sich unter beliebigem Winkel schneidende Gerade, ihre Asymptoten, die Parabeln in zwei parallele, bezw. zusammenfallende Gerade aus.

Hiernach kommen für hyperbolische Schnitte nur die 6 zuletzt aufgezählten Flächen in Betracht (vergl. S. 123). Ihre Gleichungen sind so gewählt, dass bei gleichen Achsen a, b, c der Kegel 10 der gemeinsame Asymptotenkegel der beiden Hyperboloide 9 und 11 ist, und dass die Ebenen 13 einerseits die Richtebenen des Paraboloides 12, anderseits die Asymptotenebenen des Zylinders 14 sind.

Sollen unter den hyperbol. Schnitten dieser 6 Flächen gleichseitige Hyperbeln vorkommen, so muss die Bedingungsgleichung 13) erfüllt sein.

Sie lautet für die Gruppen IV und V:

IV: $\alpha^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\beta^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\gamma^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=0$

oder:

$$\underline{a^2(b^2-c^2)\cdot\alpha^2+b^2(a^2-c^2)\cdot\beta^2-c^2(a^2+b^2)\cdot\gamma^2=0.}$$

V: $$\alpha^2\cdot\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)-\beta^2\cdot\frac{1}{c^2}+\gamma^2\cdot\frac{1}{b^2}=0$$

oder:

$$\underline{(b^2-c^2)\cdot\alpha^2+b^2\cdot\beta^2-c^2\cdot\gamma^2=0.}$$

Das gibt die Sätze:

1. Alle Ebenen, welche die Flächen:

1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+\varepsilon=0;\ (\varepsilon=-1,0,+1)$$

in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, umhüllen den unendlich fernen Kegelschnitt:*

2) $$a^2(b^2-c^2)\cdot\alpha^2+b^2(a^2-c^2)\cdot\beta^2 -c^2(a^2+b^2)\cdot\gamma^2=0.$$

2. Alle Ebenen, welche die Flächen:

3) $$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+\varepsilon=0;\ (\varepsilon=-1,0,+1)$$

und:

3') $$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+2x=0$$

in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, umhüllen den unendlich fernen Kegelschnitt:*

4) $$(b^2-c^2)\cdot\alpha^2+b^2\cdot\beta^2-c^2\cdot\gamma^2=0.$$

Für die durch O gehenden hyperzyklischen Ebenen kommt beidemal die Bedingung $\delta=0$ hinzu, d. h.:

3. Die durch O gehenden hyperzyklischen Ebenen der Flächen 1) umhüllen den mit den gegebenen Flächen konzentrischen und koaxialen Kegel 2. Grades:

5) $$a^2(b^2-c^2)\cdot\alpha^2+b^2(a^2-c^2)\cdot\beta^2 -c^2(a^2+b^2)\cdot\gamma^2=0,\ \delta=0.$$

4. Die durch O gehenden hyperzyklischen Ebenen der Flächen 3) und 3') umhüllen den mit den gegebenen Flächen koaxialen Kegel 2. Grades:

6) $$(b^2-c^2)\cdot\alpha^2+b^2\cdot\beta^2-c^2\cdot\gamma^2=0,\ \delta=0.$$

Ist a=c oder b=c, so erleiden diese Sätze Ausnahmen; denn unter dieser Voraussetzung stellen die Gleichungen 2) und 4) keine Kegelschnitte, sondern unendlich ferne Punktepaare dar. Ist gleichzeitig a=c und b=c, also a=b=c, so reduziert sich Gleichung 2) auf $\gamma^2=0$, stellt also den unendlich fernen Punkt der z-Achse doppelt dar.

Die Ortskegel 5) und 6) der hyperzyklischen Ebenen zerfallen bei diesen Annahmen jeder in ein Paar von Ebenenbüscheln, bezw. einen doppelt zu zählenden Ebenenbüschel.

Bevor wir auf diese Ausnahmefälle näher eingehen, übertragen wir die Gleichungen 5) und 6) in Punktkoordinaten.

Wir behandeln von nun ab die Flächen der Gruppen IV und V getrennt.

§ 14.

Die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der beiden Hyperboloide und des Kegels 2. Grades.

Zur Überführung der Gleichung 5) in Punktkoordinaten dient dasselbe Verfahren wie auf S. 126.

Die Relationen zwischen den Koordinaten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgend einer Tangentialebene des unendlich fernen Kegelschnittes 3) und denen ihres Berührungspunktes x, y, z, t lauten:

7) $$\left\{\begin{array}{c} \alpha=\dfrac{x}{a^2(b^2-c^2)},\ \beta=\dfrac{y}{b^2(a^2-c^2)}, \\ \gamma=\dfrac{z}{c^2(a^2+b^2)},\ 0=t. \end{array}\right.$$

Durch diese Substitutionen geht aus 3) die Gleichung desselben unendlich fernen Kegelschnittes in Punktkoordinaten und bei Unterdrückung der Bedingung t 0 die Gleichung des von O über 3) errichteten Kegels 5) in Punktkoordinaten hervor:

$$8)\quad \frac{x^2}{a^2(b^2-c^2)}+\frac{y^2}{b^2(a^2-c^2)}-\frac{z^2}{c^2(a^2+b^2)}=0\ ^1).$$

Der Kegel 8) steht zu den gegebenen Flächen 1) in einer besonderen Beziehung, welche Rupp bereits erkannt hat, und die hier aus den Gleichungen abgeleitet werden soll.

Wir bedürfen dazu einiger Vorbemerkungen, bezüglich derer auf Salmon-Fiedler, Geom. d. Raumes, Art. 147, 148 und 151 verwiesen sei[2]).

Ist eine Mittelpunktfläche 2. Ordnung oder ein Kegel:

$$\frac{x^2}{L}+\frac{y^2}{M}+\frac{z^2}{N}+\varepsilon=0$$

gegeben, so sind ihre 6 Kreisschnittsysteme folgenden drei Ebenenpaaren parallel:

$$1.\quad \left(\frac{1}{L}-\frac{1}{N}\right)\cdot x^2+\left(\frac{1}{M}-\frac{1}{N}\right)\cdot y^2=0$$

$$2.\quad \left(\frac{1}{M}-\frac{1}{L}\right)\cdot y^2+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{L}\right)\cdot z^2=0$$

$$3.\quad \left(\frac{1}{N}-\frac{1}{M}\right)\cdot z^2+\left(\frac{1}{L}-\frac{1}{M}\right)\cdot x^2=0$$

oder:

$$9)\quad \begin{cases} 1.\ M(N-L)\cdot x^2+L(N-M)\cdot y^2=0 \\ 2.\ N(L-M)\cdot y^2+M(L-N)\cdot z^2=0 \\ 3.\ L(M-N)\cdot z^2+N(M-L)\cdot x^2=0, \end{cases}$$

[1]) Vergl. Schlömilch, S. 58.

[2]) Bezüglich der Fokallinien vergl. auch: Fr. Graefe, Auflösungen und Beweise der Aufgaben und Lehrsätze aus der anal. Geom. d. Raumes (1890), 443, 444, S. 147.

von denen immer nur eines reell ist, die beiden andern imaginär; z. B. für $L > M$, $N < 0$ stellt die 2. Gleichung 9) die reellen Kreisschnitte dar.

Ist eine andere Mittelpunktsfläche 2. Ordnung in der Form:

$$\frac{x^2}{L'} + \frac{y^2}{M'} + \frac{z^2}{N'} + \varepsilon = 0$$

gegeben, so besitzt sie folgende drei Fokalkegelschnitte:

1. $\frac{x^2}{L' - N'} + \frac{y^2}{M' - N'} + \varepsilon = 0,\ z = 0$

2. $\frac{y^2}{M' - L'} + \frac{z^2}{N' - L'} + \varepsilon = 0,\ x = 0$

3. $\frac{z^2}{N' - M'} + \frac{x^2}{L' - M'} + \varepsilon = 0,\ y = 0$

oder:

1. $(M' - N') \cdot x^2 + (L' - N') \cdot y^2 + (L' - N')(M' - N') \cdot \varepsilon = 0,\ z = 0$

2. $(N' - L') \cdot y^2 + (M' - L') \cdot z^2 + (M' - L')(N' - L) \cdot \varepsilon = 0,\ x = 0$

3. $(L' - M') \cdot z^2 + (N' - M') \cdot x^2 + (N' - M')(L' - M') \cdot \varepsilon = 0,\ y = 0,$

von denen immer einer eine Ellipse, einer eine Hyperbel und der dritte imaginär ist.

Ist die gegebene Fläche ein Kegel, so gelten mit Einsetzung des Wertes $\varepsilon = 0$ dieselben Formeln:

10)
1. $(M' - N') \cdot x^2 + (L' - N') \cdot y^2 = 0,\ z = 0$
2. $(N' - L') \cdot y^2 + (M' - L') \cdot z^2 = 0,\ x = 0$
3. $(L' - M') \cdot z^2 + (N' - M') \cdot x^2 = 0,\ y = 0.$

Da in diesem Falle einer der drei Nenner der gegebenen Gleichung L', M' oder N' negativ ist, so werden zwei der drei Gleichungen 10) nur von den Koordinaten der Kegelspitze befriedigt; die dritte stellt zwei Gerade dar, welche in einer der Koordi-

natenebenen zu den Achsen symmetrisch liegen und als Fokallinien des Kegels bezeichnet werden.

Ist z. B. $L' < M'$, $N' < 0$, so gibt die zweite Gleichung 10) die Fokalgeraden des gegebenen Kegels an.

Aus Salmon-Fiedler, a. a. O., S. 158 u. 193 entnehmen wir folgende beiden Sätze über die Fokalgeraden:

Jeder Schnitt eines Kegels durch eine Ebene, die zu einer seiner Fokallinien normal ist, hat den Fusspunkt dieser letzteren zum Brennpunkt,

und

Die Fokallinien eines Kegels sind normal zu den Kreisschnitten des Reziprokalkegels.

Setzt man:

$$L = a^2,\ M = b^2,\ N = -c^2;$$

$$L' = a^2(b^2 - c^2),\ M' = b^2(a^2 - c^2),\ N' = -c^2(a^2 + b^2),$$

so bestimmen die Gleichungen 9) die Kreisschnitte der Flächen 1), die Gleichungen 10) die Fokallinien des Kegels 8).

Führt man in 9) und 10) die angegebenen Substitutionen aus, so nehmen die Koeffizienten folgende Werte an:

$$M(N - L) = -M(L - N) = -b^2(a^2 + c^2)$$
$$N(L - M) = -N(M - L) = -c^2(a^2 - b^2)$$
$$L(M - N) = -L(N - M) = a^2(b^2 + c^2)$$

und:

$$M' - N' = -(N' - M') = a^2(b^2 + c^2)$$
$$N' - L' = -(L' - N') = -b^2(a^2 + c^2)$$
$$L' - M' = -(M' - L') = -c^2(a^2 - b^2),$$

wir erhalten also die beiden Gleichungssysteme:

$$11)\begin{cases} 1. & -b^2(a^2 + c^2) \cdot x^2 - a^2(b^2 + c^2) \cdot y^2 = 0 \\ 2. & -c^2(a^2 - b^2) \cdot y^2 + b^2(a^2 + c^2) \cdot z^2 = 0 \\ 3. & a^2(b^2 + c^2) \cdot z^2 + c^2(a^2 - b^2) \cdot x^2 = 0 \end{cases}$$

für die *Kreisschnitte der Flächen 1)*

und:

$$12)\begin{cases} 1. \quad a^2(b^2+c^2)\cdot x^2+b^2(a^2+c^2)\cdot y^2 \quad 0,\ z \quad 0 \\ 2. \ -b^2(a^2+c^2)\cdot y^2+c^2(a^2-b^2)\cdot z^2 = 0,\ x = 0 \\ 3. \ -c^2(a^2-b^2)\cdot z^2-a^2(b^2+c^2)\cdot x^2 \quad 0,\ y \quad 0 \end{cases}$$

für die *Fokallinien des Kegels 8).*

Welche von den Kreisschnitten 11) und den Fokallinien 12) reell sind, hängt von dem Grössenverhältnis der Achsen a und b ab. Für $a > b$ sind es die durch die zweiten Gleichungen 11) bezw. 12) dargestellten Kreisschnitte bzw. Fokallinien, für $a < b$ die den dritten Gleichungen entsprechenden. Ist endlich a b, sind also die gegebenen Flächen 1) Rotationsflächen, so ist auch der Kegel 8) ein Rotationskegel: in diesem Falle folgt aus 11) als Gleichung der Kreisschnitte der Flächen 1):

$$z^2 = 0$$

und aus 12) als Gleichungen der Fokallinien des Kegels 8):

$$x = 0,\ y = 0,$$

d. h. die beiden Kreisschnittsysteme der gegebenen Flächen fallen in eins zusammen, welches der xy-Ebene parallel ist, und die Fokallinien des Ortskegels 8) der hyperzyklischen Ebenen fallen in die z-Achse, stehen also auf den Kreisschnitten der Flächen 1) senkrecht.

Diese Eigenschaft kommt den Fokalgeraden des Kegels 8) allgemein zu, also auch in den Fällen $a \gtrless b$, wie sich aus der Vergleichung der Koeffizienten in den zusammengehörigen Gleichungen 11) und 12) ergibt.

Wir gelangen damit zu den Sätzen:

1. *Die Ebenen, welche durch den Mittelpunkt eines gegebenen Hyperboloides gehen und dasselbe in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, umhüllen einen mit dem Hyperboloid konzentrischen und koaxialen Kegel*

2. Grades, dessen Fokalgeraden auf den Kreisebenen des Hyperboloides senkrecht stehen,

2. *„Die Ebenen, welche einen Kegel 2. Grades in Paaren auf einander senkrecht stehender Erzeugenden schneiden, umhüllen einen zweiten, mit dem vorigen konzentrischen und koaxialen Kegel 2. Grades, dessen Fokalgeraden auf den Kreisebenen des ersteren senkrecht stehen*[1]).

Es sei noch einmal hervorgehoben, dass die Untersuchungen dieses Paragraphen auf die Fälle $a = c$, $b = c$, $a = b = c$ keine Anwendung finden.

Auf die übrigen Möglichkeiten wollen wir im einzelnen eingehen. Da in der Gleichung

$$1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \varepsilon = 0$$

die Achsen $2a$ und $2b$ ganz gleichwertig sind, so bedeutet eine Vertauschung ihrer Werte nur eine Drehung der gegebenen und aller aus ihnen abgeleiteten Flächen um die z-Achse um den Winkel 90^0, ergibt aber im übrigen nichts Neues. Es genügt daher, wenn wir die Untersuchung auf die Fälle $a \geqq b$ beschränken, die Fälle $a < b$ dagegen ausser Acht lassen.

Wir haben bereits erkannt,

dass eine Ebene, welche ein gegebenes Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet, auch das konjugierte Hyperboloid und den zugehörigen gemeinsamen Asymptotenkegel in einer gleichseitigen Hyperbel bzw. einem Paare aufeinander normaler Erzeugenden schneidet, und dass dasselbe von allen ihr parallelen Ebenen gilt.

---

[1]) Vergl. O. Rupp, S. 31. *Gleichung 8) lässt allgemein erkennen, dass die reelle Achse des Ortskegels der hyperzyklischen Ebenen stets in die kleinste Achse der gegebenen Flächen 1) fällt,* vergl. Schlömilch, S. 62, Schober, S. 41.

Aus diesem Grunde dürfen wir uns auf die Betrachtung derjenigen Ebenen beschränken, welche durch O gehen und den Kegel:

$$1') \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

in zwei aufeinander senkrecht stehenden Kegelstrahlen schneiden. Sie umhüllen nach dem Vorigen den Kegel:

$$8) \qquad \frac{x^2}{a^2(b^2-c^2)}+\frac{y^2}{b^2(a^2-c^2)}-\frac{z^2}{c^2(a^2+b^2)}=0.$$

Unsere Aufgabe ist es, die Lagebeziehungen dieser beiden Kegel 1') und 8) kennen zu lernen.

Zu dem Zweck erinnern wir zunächst noch einmal an das auf S. 85 Gesagte.

Wir bezeichneten dort als Achsenschnitt eines Kegels jeden durch die reelle Hauptachse geführten ebenen Schnitt und als Hauptachsenschnitte oder kurz Hauptschnitte diejenigen beiden Achsenschnitte, welche eine der beiden Nebenachsen enthalten, im Falle des Kegels 1') also die in den Koordinatenebenen x = 0 und y = 0 gelegenen. Den von den beiden *einem Achsenschnitt angehörigen* Erzeugenden eingeschlossenen inneren Winkelraum nannten wir „Öffnungswinkel" oder „Öffnungsweite" des Kegels, auch wohl kurz „Kegelöffnung". Demnach ist der Neigungswinkel der einem Achsenschnitte angehörigen Erzeugenden gegen die reelle Hauptachse gleich der halben Kegelöffnung in dem betreffenden Achsenschnitt. Auf elementarem Wege lässt sich leicht beweisen, dass die grösste Kegelöffnung in demjenigen Hauptschnitt gelegen ist, welcher die grössere Nebenachse enthält. Es ist zugleich der grösste überhaupt von irgend zwei Erzeugenden des Kegels eingeschlossene Winkel.

Aus der Hauptachsengleichung eines Kegels kann man seine beiden Hauptöffnungen sehr leicht berechnen.

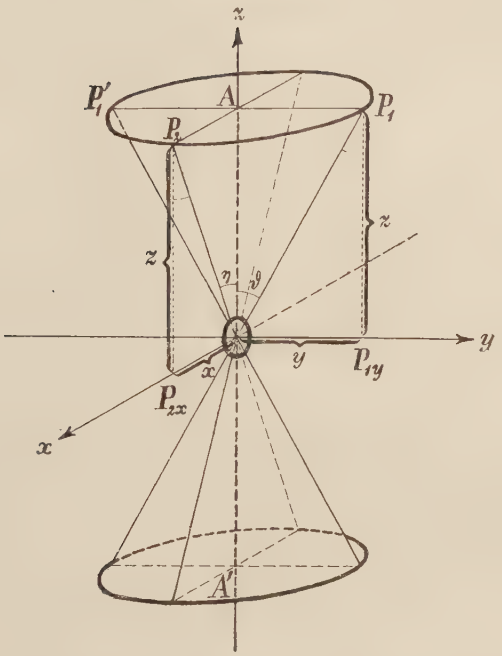


Fig. 11.

Angenommen, Figur 11 stelle den Kegel 1') dar und $\sphericalangle P_1 O P_1' = 2\vartheta$ und $\sphericalangle P_2 O P_2' = 2\eta$ seien seine Hauptöffnungen, so erhält man aus:

$$x = 0: \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ oder } \frac{y^2}{z^2} = \frac{b^2}{c^2} = \operatorname{tg}^2\vartheta$$

und aus:

$$y = 0: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ oder } \frac{x^2}{z^2} = \frac{a^2}{c^2} = \operatorname{tg}^2\eta,$$

also:

13) $$tg\vartheta = \frac{b}{c}, \quad tg\eta = \frac{a}{c}.$$

I.

Hieraus gewinnen wir unmittelbar einen Satz, der sich in verschiedenen Formen schon bei Schlömilch, Krewer, Schober und Weyer findet[1]).

[1]) Vergl. die Seiten 41, 59, 78, 80, 91, 94.

Ist nämlich $c > b$ und $c > a$, also die reelle Achse des Kegels die grösste, so ist:

$$\operatorname{tg}\vartheta < 1, \quad \operatorname{tg}\eta_1 < 1,$$

also:

$$\vartheta < 45^0, \quad \eta_1 < 45^0,$$

d. h. die grösste Öffnungsweite des gegebenen Kegels, die, je nachdem $a > b$, $a < b$ oder $a = b$ ist, $2\eta_1$, 2ϑ oder $2\eta_1 - 2\vartheta$ ist, ist kleiner als 90^0. Der Kegel kann daher in keiner durch seine Spitze gehenden Ebene einen Winkel von 90^0 enthalten, folglich auch keine gleichseitig-hyperbol. Schnitte. Dasselbe gilt nach dem Vorigen für die zugehörigen Hyperboloide.

Das folgt auch daraus, dass in diesem Falle alle drei Glieder der Gleichung 8) negativ werden, so dass der Ortskegel der durch O gehenden hyperzyklischen Ebenen imaginär wird.

Sobald eine der beiden Nebenachsen grösser als c wird, ist entweder ϑ oder η_1 grösser als 45^0, und es gibt gleichseitige Hyperbeln auf dem Kegel.

Wir können daher folgende Sätze aussprechen:

3. *Ein Kegel kann nur dann in gleichseitigen Hyperbeln* geschnitten werden, wenn die reelle Achse nicht die grösste seiner drei Achsen ist.*

Ist diese Bedingung erfüllt, so sind immer gleichseitig-hyperbolische Schnitte vorhanden.

Oder:

Sollen auf einem Kegel 2. Grades gleichseitige Hyperbeln liegen, so muss seine grösste Öffnungsweite mindestens 90^0 betragen.

4. *Ein Hyperboloid kann nur dann in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten werden, wenn die reelle Achse seines Asymptotenkegels nicht die grösste seiner drei Achsen ist.*

Nach Erledigung der Fälle $c > a > b$ bleiben noch die Möglichkeiten $a > c > b$ und $a \geq b > c$ zu behan-

deln, von denen wir die beiden letzteren als die einfacheren zuerst besprechen:

II.

$a > b > c.$

Ist c die kleinste Achse des gegeben Kegels:

1′) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

so betragen seine Öffnungsweiten in allen Achsenschnitten mehr als 90^0, da:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{b}{c} > 1, \quad \operatorname{tg}\eta = \frac{a}{c} > 1$$

ist.

In diesem Falle hat der zugehörige, von den hyperzyklischen Ebenen gebildete Kegel:

8) $$\frac{x^2}{a^2(b^2-c^2)} + \frac{y^2}{b^2(a^2-c^2)} - \frac{z^2}{c^2(a^2+b^2)} = 0$$

gleich dem gegebenen Kegel 1′) die z-Achse zur Hauptachse. Dagegen fällt die grössere Nebenachse des abgeleiteten Kegels 8) in die kleinere Nebenachse des gegebenen Kegels 1′) und umgekehrt, da für $a > b$:

$$a^2b^2 - b^2c^2 > a^2b^2 - a^2c^2$$

ist.

Schreibt man 8) in der Form:

8) $$\frac{x^2}{a^2 \cdot \frac{b^2-c^2}{a^2+b^2}} + \frac{y^2}{b^2 \cdot \frac{a^2-c^2}{a^2+b^2}} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

in der die reelle Hauptachse denselben Wert hat wie in der Gleichung 1′) des gegebenen Kegels, so erkennt man daraus, dass die grössere Nebenachse des Kegels 8):

$$b \cdot \sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+b^2}}$$

kleiner ist als die kleinere Nebenachse b des Kegels 1′), dass der abgeleitete Kegel ganz und gar innerhalb des gegebenen liegt.

Eine der xy-Ebene parallele Ebene $z = c$ schneidet beide Kegel in Ellipsen, deren gleichnamige Achsen aufeinander senkrecht stehen, und die leicht elementar konstruierbar sind:

Ist im besonderen $a = b$, so ist sowohl der gegebene wie der abgeleitete Kegel ein Rotationskegel. Ihre Gleichungen sind:

$$1'') \qquad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

und:

$$8') \qquad \frac{x^2 + y^1}{a^2 - c^2} - \frac{z^2}{2c^2} = 0.$$

Der Schnitt mit der Ebene $z = c$ liefert zwei konzentrische Kreise, von denen der aus 8') ausgeschnittene in dem aus 1'') ausgeschnittenen eingeschlossen ist, d. h.:

5. *Ist die reelle Achse des gegebenen Kegels die kleinste seiner drei Achsen, so liegt der von den durch O gehenden hyperzyklischen Ebenen desselben umhüllte Kegel vollständig innerhalb des gegebenen, und zwar so, dass seine grössere Nebenachse in die kleinere Nebenachse des gegebenen Kegels fällt und umgekehrt.*
6. *Ist der gegebene Kegel ein Rotationskegel, so ist der geometrische Ort seiner durch die Spitze gehenden hyperzyklischen Ebenen ein zweiter gleichorientierter Rotationskegel, der vom ersteren vollständig umschlossen wird.*

III.

$a > c > b.$

Aus 13) folgt, dass unter der Voraussetzung $a > c > b$ die Öffnungsweite des gegebenen Kegels 1') in der xy-Ebene mehr als 90°, in der yz-Ebene weniger als 90° beträgt. Zwischen beiden Hauptschnitten müssen daher zwei zur x- und y-Achse symmetrisch gelegene Achsenschnitte von 90° Öffnungsweite vorhanden sein. Ihre Lage werden wir im folgenden bestimmen.

Da $b^2 - c^2$ negativ wird, schreiben wir 8) in der Form:

$$8'') \quad \frac{x^2}{a^2(c^2-b^2)} - \frac{y^2}{b^2(a^2-c^2)} + \frac{z^2}{c^2(a^2+b^2)} = 0$$

und erkennen hieraus, dass der Ortskegel der hyperzyklischen Ebenen in diesem Falle die y-Achse zur reellen Achse hat.

Die Ebene z = c schneidet den Kegel 1') in der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

den Kegel 8'') in der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2 \cdot \frac{c^2-b^2}{a^2+b^2}} + \frac{y^2}{b^2 \cdot \frac{a^2-c^2}{a^2+b^2}} = 1,$$

deren reelle Achse $b \cdot \sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+b^2}}$ in die y-Achse fällt. Da:

$$b \cdot \sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+b^2}} < b$$

ist, so liegt die Hyperbel teilweise innerhalb der Ellipse und schneidet diese in vier reellen Punkten, deren Verbindungslinien mit der Kegelspitze 0 die vier gemeinsamen Erzeugenden der beiden konzentrischen Kegel 1') und 8'') sind. Der Kegel 8'') liegt hiernach nur teilweise innerhalb des Kegels 1').

Die beiden oben erwähnten Achsenschnitte von 90° Öffnungsweite müssen Tangentialebenen des Kegels 8'') sein. In der Tat befinden sich unter den Tangentialebenen von 8'') notwendig zwei, welche auf der xy-Ebene senkrecht stehen, also durch die z-Achse gehen. Ihre Spuren in der xy-Ebene bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$14) \quad z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2(c^2-b^2)} - \frac{y^2}{b^2(a^2-c^2)} = 0,$$

sie selbst haben also die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2(c^2-b^2)} - \frac{y^2}{b^2(a^2-c^2)} = 0$$

oder:

$$\left(\frac{x}{a\sqrt{c^2-b^2}}+\frac{y}{b\sqrt{a^2-c^2}}\right)\left(\frac{x}{a\sqrt{c^2-b^2}}-\frac{y}{b\sqrt{a^2-c^2}}\right)=0.$$

Bezeichnen wir den Neigungswinkel dieser Ebenen gegen die x-Achse oder, was dasselbe ist, den Winkel, welchen ihre Spuren in der xy-Ebene mit der x-Achse bilden, mit ψ, so ist:

$$15) \qquad \operatorname{tg}^2\psi=\frac{y^2}{x^2}=\frac{b^2(a^2-c^2)}{a^2(c^2-b^2)}.$$

Da die Gleichungen 14) die in der xy-Ebene gelegenen Erzeugenden des Kegels 8'') bedeuten, so ist ψ der Komplementwinkel zur halben Öffnungsweite ψ' des Kegels 8'') in der xy-Ebene. Daher wird jede Gerade der xy-Ebene, welche durch O geht, und deren Winkel gegen die x-Achse grösser als der aus 15) berechnete Winkel ψ ist, im Innern des Kegels 8'') liegen; eine durch eine solche Gerade hindurchgehende Ebene muss also notwendig den Kegel 8'') schneiden, kann mithin nie Tangentialebene desselben sein.

Daraus geht hervor, dass die Tangentialebenen des Kegels 8''), d. h. diejenigen Ebenen, welche den gegebenen Kegel in zwei aufeinander senkrecht stehenden Kegelstrahlen schneiden, an die Bedingung:

$$16) \qquad \operatorname{tg}^2\psi\leq\frac{b^2(a^2-c^2)}{a^2(c^2-b^2)}$$

gebunden sind, vergl. hierzu das in § 5, S. 60, im Anschluss an Schlömilch Gesagte.

Das Ergebnis ist:

7. *Wenn die reelle Achse des gegebenen Kegels 1') die mittlere seiner drei Achsen ist, so umhüllen diejenigen Ebenen, welche 1') in je zwei aufeinander senkrecht stehenden Kegelstrahlen schneiden, einen zweiten mit 1') konzentrischen und koaxialen Kegels 8''), dessen reelle Achse in die kleinste Achse von 1') fällt, und der 1') stets in vier gemeinsamen Erzeugenden schneidet.*

Die beiden Hyperboloide, deren Asymptotenkegel 1') ist, besitzen in diesem Falle zwei ihrer Hauptachse parallele Systeme hyperzyklischer Ebenen.

Zu den Kegeln der zweiten Gruppe: $a > b > c$ gehören im besondern die gleichseitigen Kegel, auf deren gleichseitig-hyperbol. Schnitte wir bereits in § 12 allgemein eingegangen waren.

Der speziellen Behandlung der gleichseitigen Flächen widmen wir die beiden letzten Paragraphen dieser Arbeit.

Vorher sollen in § 15 die gleichseitigen Hyperbelschnitte derjenigen Kegel erledigt werden, für welche $a = c > b$, $a > c = b$ oder $a = b = c$ ist, und dann in § 16 die gleichseitig-hyperbol. Schnitte der hyperbol. Paraboloide und Zylinder und die rechtwinkligen Schnitte des Ebenenpaares.

§ 15.

Die drei Ausnahmefälle:

$$a = c > b,\ a > c = b,\ a = c = b.$$

Ist in der Gleichung:

$$1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \varepsilon = 0$$

der gegebenen Hyperboloide, bzw. ihres Asymptotenkegels $a = c > b$, $a > c = b$ oder $a = c = b$, so reduziert sich die Gleichung:

$$2) \qquad a^2(b^2 - c^2)\,\alpha^2 + b^2(a^2 - c^2)\,\beta^2 - c^2(a^2 + b^2)\,\gamma^2 = 0$$

des geometrischen Ortes ihrer hyperzyklischen Ebenen auf:

$$17) \qquad (a^2 - b^2)\,\alpha^2 + (a^2 + b^2)\,\gamma^2 = 0,$$

$$18) \qquad (a^2 - b^2)\,\beta^2 - (a^2 + b^2)\,\gamma^2 = 0,$$

$$19) \qquad \gamma^2 = 0,$$

stellt also in den beiden ersten Fällen ein unendlich fernes Punktepaar, im letzten Falle einen unendlich fernen Doppelpunkt dar, vergl. S. 109.

Wir gehen der Reihe nach auf diese Fälle ein:

I.

$$a = c > b.$$

Die Gleichung der gegebenen Flächen hat die Form:

20) $$\frac{x^2 - z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon = 0.$$

Nach § 14, Gleichung 13) berechnen sich die beiden Haupt-Kegelöffnungen ihres Asymptotenkegels:

20′) $$\frac{x^2 - z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

aus:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b}{c} = \frac{b}{a} < 1, \quad \operatorname{tg} \eta = \frac{a}{c} = \frac{a}{a} = 1,$$

haben also den Wert:

$$2\delta < 90^0, \quad 2\eta = 90^0;$$

d. h. *die grösste Öffnungsweite des Asymptotenkegels 20′) ist gerade gleich 90°.* Sie liegt in der zx-Ebene.

Daraus folgt, dass die Flächen 20) nur von der zx-Ebene und den ihr parallelen Ebenen in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten werden können.

Auf dasselbe Resultat führt die Gleichung:

17) $$(a^2 - b^2)\,\alpha^2 + (a^2 + b^2)\,\gamma^2 = 0$$

des geometrischen Ortes der hyperzyklischen Ebenen dieser Flächen. Denn da beide Koeffizienten positiv sind, so wird Gleichung 17) nur dann erfüllt, wenn gleichzeitig:

17′) $$\alpha^2 = 0, \ \gamma^2 = 0 \text{ oder } \alpha = 0, \ \gamma = 0$$

ist. 17′) bedeutet aber nach S. 109 alle durch die unendlich ferne Gerade der zx-Ebene gehenden Ebenen, mit andern Worten die zx-Ebene selbst und alle ihr parallelen Ebenen.

Die ursprüngliche Bedingungsgleichung 17') zeigt, dass die Gesamtheit dieser Ebenen als Doppel-Ebenenbüschel aufzufassen ist.

Sehen wir von den Quadraten ab, so erhalten wir die Gleichung des Ebenenbüschels der hyperzyklischen Ebenen in Punktkoordinaten durch Einsetzen von $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ in die Gleichung der schneidenden Ebene:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0;$$

sie lautet daher:

$$\beta y + \delta = 0$$

oder; wenn man $\frac{\delta}{\beta} = \delta'$ setzt:

21) $$y + \delta' = 0$$

bei variablem δ', wie vorauszusehen war.

Für $\delta = 0$ ist auch $\delta' = 0$. Daher ist die zx-Ebene:

17'') $$\alpha = 0,\ \gamma = 0,\ \delta = 0,$$

bzw.

21') $$y = 0$$

die einzige durch O gehende Ebene, welche die Flächen 20) in gleichseitigen Hyperbeln, bzw. zwei aufeinander senkrecht stehenden Geraden schneidet. Da es eigentlich $\alpha^2 = 0$, $\gamma^2 = 0$ heisst, ist sie doppelt zu zählen [1]).

Wir erhalten daher den Satz:

1. *Der geometrische Ort aller hyperzyklischen Ebenen der Flächen:*

20) $$\frac{x^2 - z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon = 0,\ (a > b)$$

---

[1]) Man könnte $a = c > b$ als Grenzfall von $a > c > b$ auffassen und dementsprechend $y^2 = 0$ aus § 14, 8'') ableiten, indem man $a^2 - c^2 = 0$ setzt. Je mehr sich c dem Grenzwerte a nähert, desto flacher wird der Kegel 8''), für den Grenzwert $c = a$ selbst wird seine reelle Achse gleich Null, beide Kegelhälften fallen in die zx-Ebene.

ist:

17) $(a^2 - b^2)\,\alpha^2 + (a^2 + b^2)\,\gamma^2 = 0$

oder:

17′) $\alpha^2 = 0,\ \gamma^2 = 0;$

es sind die unendlich fernen Punkte der z- und der x-Achse, doppelt gezählt. Die Ebenen aller gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der gegebenen Flächen sind daher der zx-Ebene parallel.

Oder:

2. *Alle Ebenen, welche ein Hyperboloid, dessen hyperbolische Achse gleich der grösseren elliptischen Achse ist, in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, sind der durch die hyperbolische und die grössere elliptische Achse bestimmten Hauptebene parallel.*
3. *Alle Ebenen, welche einen Kegel, dessen grösste Öffnungsweite 90° beträgt, in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, sind dem Hauptschnitt der grössten Öffnungsweite parallel.*

II.

$a > c > b.$

Die Gleichung der gegebenen Flächen hat die Form:

22) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 - z^2}{b^2} + \varepsilon = 0.$$

Die beiden Hauptöffnungen ihres Asymptotenkegels:

22′) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 - z^2}{b^2} = 0$$

ergeben sich aus 13):

$$\operatorname{tg}\vartheta + \frac{b}{c} = \frac{b}{b} + 1,\quad \operatorname{tg}\eta + \frac{a}{c} = \frac{a}{b} > 1,$$

also:

$$2\vartheta + 90^0,\quad 2\eta > 90^0.$$

Wir haben also den Fall vor uns, in dem *die kleinste,* in der yz-Ebene gelegene *Öffnungsweite des Asymptotenkegels der gegebenen Hyperboloide* 90^0 beträgt.

Daraus erkennen wir zunächst, dass die yz-Ebene mit allen ihr parallelen Ebenen gleichseitig-hyperbol. Schnitte liefert, doch sind dies nicht die einzigen. Denkt man sich nämlich eine Ebene um irgend eine in der xy-Ebene gelegene und durch O gehende Gerade gedreht, so wird dieselbe während der Drehung aus der Stellung des Achsenschnittes in die einer Tangentialebene des Kegels aus diesem in kontinuierlicher Reihenfolge alle Winkel ausschneiden, welche zwischen der Kegelöffnung in dem betreffenden Achsenschnitt und dem Winkel 0^0 liegen. Dabei wird die Schnittebene in zwei Stellungen, welche gegen den Achsenschnitt nach entgegengesetzten Richtungen gleich stark geneigt sind, jedesmal gleiche Winkel im Kegel liefern. Da nun im Kegel 22′) die Öffnungsweiten aller Achsenschnitte mit Ausnahme des in der yz-Ebene gelegenen mehr als 90^0 betragen, so gehen durch jede in der xy-Ebene gelegene und durch O gehende Gerade zwei Ebenen, welche aus dem Kegel rechte Winkel ausschneiden, und welche zu dem durch die betrachtete Gerade gehenden Achsenschnitt symmetrisch gelegen sind. Nur die durch die y-Achse gehenden rechtwinkligen Schnitte fallen in einen, die yz-Ebene zusammen.

Zur genaueren Bestimmung der Lage der hyperzyklischen Ebenen dient die Gleichung:

18) $\qquad (a^2 - b^2) \cdot \beta^2 - (a^2 + b^2) \cdot \gamma^2 = 0$

ihres geometrischen Ortes.

Nach S. 109 stellt 18) ein unendlich fernes Punktepaar in der yz-Ebene dar.

Die durch O gehenden hyperzyklischen Ebenen bilden die beiden Ebenenbüschel:

18′) $\quad (a^2 - b^2) \cdot \beta^2 - (a^2 + b^2) \cdot \gamma^2 = 0,\ \delta = 0,$

deren Achsen in der yz-Ebene zur z-Achse symmetrisch liegen.

Sind a′, b′. c′ die Strecken, welche eine Ebene:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

auf der x-, y-, z-Achse abschneidet, so ist nach der Definition der Ebenenkoordinaten:

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a'} : \frac{1}{b'} : \frac{1}{c'}.$$

Hieraus erhalten wir mit Rücksicht auf nebenstehende Figur für die hyperzyklischen Ebenen 18) die Bedingung:

23) $$\frac{\beta}{\gamma} \quad \frac{c'}{b'} \cdot \operatorname{tg}\varphi = \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}}$$

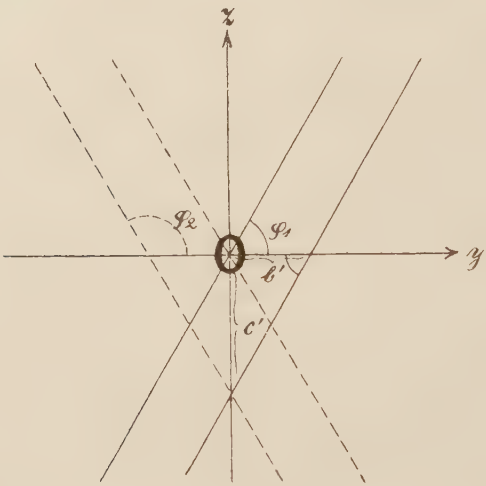


Fig. 12.

zur Berechnung der Winkel φ_1 und φ_2, welche die Spuren der beiden Systeme hyperzyklischer Ebenen:

$$(a^2 - b^2) \cdot \beta + (a^2 + b^2) \cdot \gamma = 0$$

und:

$$(a^2 - b^2) \cdot \beta - (a^2 + b^2) \cdot \gamma = 0$$

in der yz-Ebene mit der positiven y-Achse bilden (vergl. Fig. 12). Im besonderen gibt daher Formel 23) die Winkel zwischen den Achsen der beiden Ebenenbüschel 18′) und der positiven y-Achse an.

Für jeden Punkt dieser Achsen ist:

$$\operatorname{tg}\varphi \quad \frac{z}{y} \quad = \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}},$$

ihre Gleichung in Punktkoordinaten ist daher:

24) $(a^2 + b^2) \cdot y^2 - (a^2 - b^2) \cdot z^2 = 0, \; x = 0.$

Die Gleichung der reellen Kreisschnitte der Flächen 22) ist nach § 14, 11):

25) $(a^2 - b^2) \cdot y^2 - (a^2 + b^2) \cdot z^2 = 0.$

Man erkennt aus den Gleichungen 24) und 25), dass die Achsen der beiden Ebenenbüschel 18′) auf den reellen Kreisschnitten der Flächen 22) senkrecht stehen[1]).

Aus 24) erhält man als Gleichungen der beiden Ebenenbüschel 18′) in Punktkoordinaten:

26) $\begin{cases} (a^2 + b^2) \cdot y + (a^2 - b^2) \cdot z + \lambda x = 0 \\ (a^2 + b^2) \cdot y - (a^2 - b^2) \cdot z + \lambda x = 0 \end{cases}$

für variables λ.

Damit sind folgende Sätze bewiesen:

4. *Der geometrische Ort aller hyperzyklischen Ebenen der Flächen:*

22) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2 - z^2}{b^2} + \varepsilon = 0$

ist ein in der yz-Ebene gelegenes unendlich fernes Punktepaar:

18) $(a^2 - b^2) \cdot \beta^2 - (a^2 + b^2) \cdot \gamma^2 = 0.$

5. *Alle Ebenen, welche die genannten Hyperboloide bezw. ihren Asymptotenkegel in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, sind den Ebenen eines der beiden Ebenenbüschel:*

26) $\begin{cases} (a^2 + b^2) \cdot y + (a^2 - b^2) \cdot z + \lambda x = 0 \\ (a^2 + b^2) \cdot y - (a^2 - b^2) \cdot z + \lambda x = 0 \end{cases}$

[1]) Man könnte sagen, der Kegel 8″) sei in diesem zweiten Grenzfalle, für den $c = b$ wird, in die beiden durch seine Fokallinien als Achsen bestimmten Ebenenbüschel degeneriert. Eine weitere Spezialisierung tritt ein für $b = c = 0$: dann wird aus 22′) und 25): $y^2 - z^2 = 0$, aus 18): $\beta^2 - \gamma^2 = 0$, aus 24): $y^2 - z^2 = 0$, $x = 0$ und endlich aus 26). wenn man für $\frac{\lambda}{a^2}$ wieder λ schreibt: $y + z + \lambda x = 0$, $y - z + \lambda x = 0$. Wir kommen damit zu den Sätzen über die rechtwinkligen Schnitte zweier aufeinander senkrecht stehender Ebenen und die gleichseitig-hyperbol. Schnitte der gleichseitigen Paraboloide und Zylinder, vergl. S. 132.

parallel, deren Achsen im Mittelpunkt der gegebenen Flächen auf ihren reellen Kreisschnitten senkrecht stehen, oder:

6. *Alle Ebenen, welche die genannten Hyperboloide bezw. ihren Asymptotenkegel in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, stehen auf einem der beiden reellen Kreisschnittsysteme der Flächen 22):*

$$25) \quad (a^2 - b^2) \cdot y^2 - (a^2 + b^2) \cdot z^2 = 0$$

senkrecht.

Rein geometrisch können wir diese Sätze so aussprechen:

7. *Alle Ebenen, welche ein Hyperboloid, dessen hyperbolische Achse gleich der kleineren elliptischen Achse ist, in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, sind den Ebenen eines der beiden Ebenenbüschel parallel, deren Achsen im Mittelpunkt des gegebenen Hyperboloides auf seinen reellen Kreisschnitten senkrecht stehen.*
8. *Alle Ebenen, welche ein Hyperboloid, dessen hyperbolische Achse gleich der kleineren elliptischen Achse ist, in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, stehen auf einem der beiden reellen Kreisschnittsysteme des gegebenen Hyperboloides senkrecht und umgekehrt.*
9. *Jede Ebene, welche auf einem Kreisschnitt eines Hyperboloides, dessen hyperbolische Achse gleich der kleineren elliptischen Achse ist, senkrecht steht, schneidet das Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel*.*
10. *Alle Ebenen, welche einen Kegel, dessen kleinste Öffnungsweite 90^0 beträgt, in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, sind den Ebenen eines der beiden Ebenenbüschel parallel, deren Achsen in der Spitze des Kegels auf seinen reellen Kreischnitten senkrecht stehen.*
11. *Alle Ebenen, welche einen Kegel, dessen kleinste Öffnungsweite 90^0 beträgt, in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, stehen auf einem der beiden reellen Kreischnittsysteme des gegebenen Kegels senkrecht,*

und umgekehrt:

*12. Jede Ebene, welche auf einem Kreisschnitt eines Kegels, dessen kleinste Öffnungsweite 90° beträgt, senkrecht steht, schneidet den Kegel in einer gleichseitigen Hyperbel.**

Die drei letzten Sätze hatten wir in etwas anderer Form bereits auf S. 100 im Anschluss an Weyer abgeleitet.

III.

$$a = c = b.$$

Die gegebenen Flächen haben die Gleichung:

27) $$x^2 + y^2 - z^2 + \varepsilon a^2 = 0;$$

es sind Rotationshyperboloide, da a = b ist. Ihr Asymptotenkegel:

27′) $$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

hat daher *in allen Achsenschnitten gleiche Kegelöffnungen, und zwar solche von 90°,* da

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\eta = \frac{a}{c} = 1,$$

also

$$2\vartheta = 2\eta = 90^0$$

ist.

Daher liefern alle der z-Achse parallelen Ebenen gleichseitige Hyperbelschnitte. Umgekehrt sind alle hyperzyklischen Ebenen der z-Achse parallel, denn die Bedingungsgleichung 2) für gleichseitig-hyperbol. Schnitte der Flächen 1) wird im Falle a = c = b zu:

19) $$\gamma^2 = 0,$$

stellt also den unendlich fernen Punkt der z-Achse, bezw. alle durch ihn hindurchgehenden Ebenen doppelt dar, mit andern Worten alle der z-Achse parallelen Ebenen doppelt gezählt.

Diejenigen Ebenen, welche den Kegel 27′) in je zwei aufeinander normalen Kegelstrahlen schneiden, bilden den Ebenenbüschel durch die z-Achse:

19′) $$\gamma = 0,\ \delta = 0,$$

der wegen 19) eigentlich doppelt gezählt werden müsste. Seine Gleichung in Punktkoordinaten ist:

28) $x+\lambda y=0.$

Die Kreisschnitte der Flächen 27) sind den Ebenen:

29) $z^2=0$

parallel, fallen also in *ein* System zusammen, welches der xy-Ebene parallel ist, folglich auf der Achse des Ebenenbüschels 28) senkrecht steht.

Wir gelangen daher zu den Sätzen:

13. *Der geometrische Ort aller hyperzyklischen Ebenen der Flächen:*

27) $x^2+y^2-z^2+\varepsilon a^2=0$

ist der unendlich ferne Punkt der z-Achse:

19) $\gamma=0,$

d. h.:

Alle Ebenen, welche die Hyperboloide 27) in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, sind der z-Achse parallel und stehen auf den Kreisschnitten der gegebenen Flächen senkrecht.*

Die durch O gehenden hyperzyklischen Ebenen bilden den Ebenenbüschel:

28) $x+\lambda y=0.$

Oder rein geometrisch:

14. *Alle Ebenen, welche ein Hyperboloid, dessen drei Achsen einander gleich sind, in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, sind der hyperbolischen Achse des gegebenen Hyperboloides parallel und stehen auf seinen Kreisschnittebenen senkrecht und umgekehrt.*

15. *Alle Ebenen, welche einen Rotationskegel von 90° Öffnungsweite in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, sind seiner reellen Achse parallel und stehen auf seinen Kreisschnittebenen senkrecht und umgekehrt.*

§ 16.

Die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte des hyperbolischen Paraboloides und hyperbolischen Zylinders und die rechtwinkligen Schnitte des Ebenenpaares.

Nach S. 126 erhält man für die Koordinaten einer beliebigen Tangentialebene des unendlich fernen Kegelschnittes

4) $(b^2 - c^2) \cdot \alpha^2 + b^2 \cdot \beta^2 - c^2 \cdot \gamma^2 = 0$

(vergl. § 13, S. 137) und diejenigen ihres Berührungspunktes die Bedingungen:

30) $\alpha = \frac{x}{b^2 - c^2}, \ \beta = \frac{y}{b^2}, \ \gamma = \frac{z}{c^2}, \ 0 = t,$

welche in 4) eingesetzt die Gleichung desselben unendlich fernen Kegelschnittes in Punktkoordinaten liefern. Lässt man die vierte Bedingung $t = 0$ fort, so erhält man die Gleichung des von O über dem Kegelschnitt 4) errichteten Kegels in Punktkoordinaten:

31) $$\frac{x^2}{b^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$ [1])

Dieser von den hyperzyklischen Ebenen des hyperbol. Zylinders:

2) $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \varepsilon = 0$$

und Paraboloides:

2′) $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0$$

umhüllte Kegel steht zu den gegebenen Flächen 2) und 2′) in einer ähnlichen Beziehung, wie der Kegel 8) zu den Flächen 1), (vergl. O. Rupp, S. 37).

Setzt man nämlich:

$$L' = b^2 - c^2, \ M' = b^2, \ N' = -c^2,$$

[1]) Vergl. Schlömilch, S. 62, 63.

so erhält man aus 10) (vergl. S. 140) folgende Gleichungen für die *Fokallinien des Kegels 31):*

$$32)\quad \begin{cases} 1.\ (b^2+c^2)\cdot x^2+b^2\cdot y^2=0,\ z=0 \\ 2.\quad -b^2\cdot y^2+c^2\cdot z^2=0,\ x=0 \\ 3.\quad -c^2\cdot z^2-(b^2+c^2)\cdot x^2=0,\ y=0, \end{cases}$$

von denen, gleichgültig, ob $b > c$ oder $c > b$ ist, immer nur die mittleren reell sind. Schreibt man ihre Gleichung in der Form:

$$33)\qquad \frac{y^2}{c^2}-\frac{z^2}{b^2}=0,\ x=0,$$

so folgt aus der Vergleichung der Koeffizienten mit denen der Gleichung:

$$2'')\qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

der Asymptotenebenen bezw. Richtebenen der gegebenen Flächen 2) bezw. 2') die genannte Beziehung zwischen dem Kegel 31) und den gegebenen Flächen, welche darin besteht, dass die Fokallinien des Kegels 31) auf den Asymptotenebenen bzw. Richtebenen der gegebenen Flächen 2) bezw. 2') senkrecht stehen.

Ist das Paraboloid 2') die gegebene Fläche, so kann man genauer sagen: Die Fokallinien des Ortskegels 31) der hyperzyklischen Ebenen stehen in der Scheitelebene auf den Scheitelstrahlen:

$$34)\qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\ x=0$$

senkrecht.

Hier vertreten also die Asymptotenebenen, bzw. Richtebenen 2'') die Stelle der Kreisebenen der Flächen 1), eine Analogie, die auch durch andere Betrachtungen gestützt wird. Wie auf S. 136 bewiesen, besitzen die Flächen 2) und 2') keine eigentlichen Kreisschnitte.

Der Kegel 31) besitzt noch eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft, welche ebenfalls bereits von Rupp gefunden ist.

Da nämlich die Scheitelstrahlen 34) des Paraboloides 2′), wie man aus den Gleichungen erkennt, zugleich die beiden in der yz-Ebene gelegenen Erzeugenden des Kegels 31) sind, und da die yz-Ebene ein Hauptschnitt dieses Kegels ist, so gehören die auf ihr senkrecht stehenden Ebenen 2′) zu den Tangentialebenen des Kegels. Jede zu ihnen parallele Ebene schneidet daher den Kegel in einer Parabel. Nach dem Obigen stehen nun die Ebenen 2′′), mithin auch die ihnen parallelen parabol. Schnitte, auf den Fokalgeraden 33) senkrecht, und zwar sind nach S. 141 die Fusspunkte der Fokallinien die Brennpunkte der Schnittparabeln. Demnach ist der Kegel 31) nach der Plückerschen Definition (vergl. S. 36) ein *„parabolischer“* Kegel.

Zur Erläuterung diene Figur 13, die der Annahme $b > c$ entspricht:

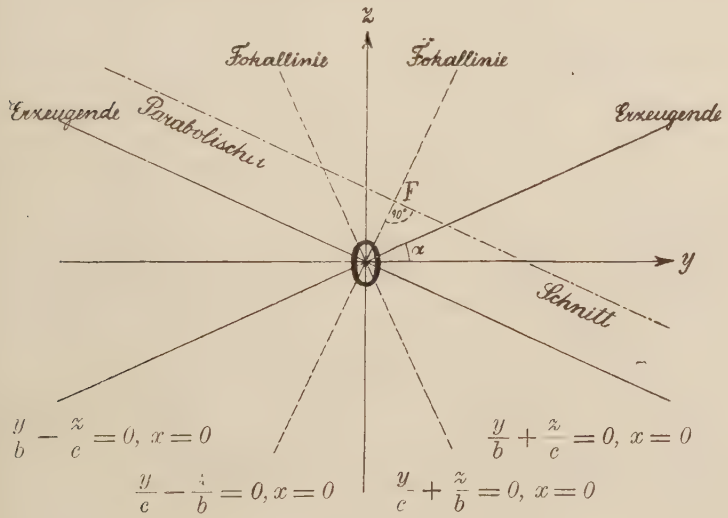


Fig. 13.

Schneidet man die Flächen 2), 2′) und 31) mit einer beliebigen Ebene senkrecht zur Hauptachse der Flächen 2), 2′): $x = \text{const.}$,

so erhält man jedesmal ähnliche und ähnlich gelegene Hyperbeln, deren gemeinsame Asymptoten den Geraden 34) parallel sind.

Die Flächen 2) und 2′), sowie das beiden gemeinsame ausgezeichnete Ebenenpaar 2″) behalten unabhängig von dem Grössenverhältnis der Achsen, bzw. Parameter b und c ihre Lage gegen die Koordinatenachsen bei, der Kegel 31) dagegen hat, je nachdem $b > c$ oder $c > b$ ist, die z-Achse oder die y-Achse zur reellen Hauptachse, d. h. jedesmal diejenige, in welcher die kleinere Achse oder der kleinere Parameter der gegebenen Fläche liegen.

Die Sätze, dass die Fokallinien des Kegels 31) auf dem Ebenenpaar 2″) senkrecht stehen, und dass der Kegel von jeder zu den Fokalgeraden normalen Ebene in Parabeln geschnitten wird, also ein sogen. parabol. Kegel ist, gelten in beiden Fällen.

Ebenso sind beidemal die Ebenen 2″) zwei ausgezeichnete Tangentialebenen des Kegels, welche insofern eine Ausnahmestellung einnehmen, als jede von ihnen die Flächen 2) in einer unendlich fernen Doppelgeraden, die Flächen 2′) in einer endlichen und einer unendlich fernen Geraden schneidet, während alle übrigen Tangentialebenen des Kegels 31) eigentliche gleichseitig-hyperbol. Schnitte der Flächen 2) und 2′), bzw. rechtwinklige Schnitte der Ebenen 2″) liefern (vergl. S. 19).

Mit Bezug auf Schlömilchs Behauptung[1]), dass die Umhüllung des Kegels 31)[2]) durch die Ebenen der gleichseitig-hyperbol. Schnitte eine nur teilweise sei, bemerken wir noch folgendes:

[1]) Vergl. S. 62.

[2]) Auf S. 63 ist nachgewiesen, dass unsere Gleichung 31) gleichbedeutend ist mit Schlömilchs Gleichung 15).

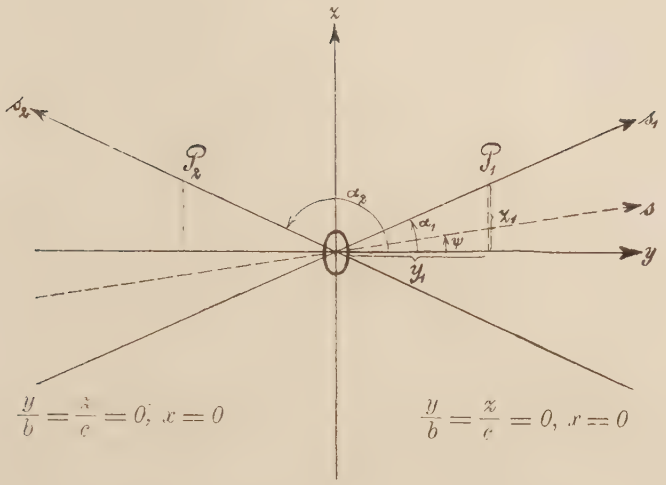


Fig. 14.

Bezeichnet man die Durchschnittslinien der Ebenen 2′′) mit der yz-Ebene mit s_1 und s_2, ihre Winkel mit der y-Achse mit α_1 und α_2 (vergl. Figur 14), so ergeben sich die Werte von α_1 und α_2 aus:

$$\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \frac{z^2}{y_2} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Sei ferner s der Durchschnitt einer beliebigen Tangentialebene des Kegels 31) mit der yz-Ebene, ψ sein Winkel gegen die y-Achse und ϑ der Neigungswinkel der betreffenden Tangentialebene gegen die yz-Ebene, so besteht nach Schlömilch (vergl. S. 61, Formel 13) die Gleichung:

$$\cos^2\vartheta = \operatorname{tg}(\alpha + \psi)\operatorname{tg}(\alpha - \psi),$$

aus welcher Schlömilch die obige Behauptung folgert.

Wir wollen die Gleichung unabhängig von Schlömilch diskutieren.

Zu dem Zweck denken wir uns zur eindeutigen Bestimmung der Winkel die Geraden s_1, s_2 und s in der Figur mit Pfeilspitzen versehen und die Winkel zwischen gleichnamigen Schenkeln in dem der Drehung des Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne gemessen; Annahmen, durch die die Allgemeinheit und Vollständigkeit der Untersuchung nicht beeinträchtigt werden.

Wir nehmen α als gegeben an und benutzen die Gleichung, um zu ermitteln, zwischen welchen Grenzen ψ liegen muss, falls ϑ reell sein soll.

Da $\alpha_2 = 180^0 - \alpha_1$ ist, so bekommen die beiden Faktoren der rechten Seiten obiger Gleichung für $\alpha = \alpha_2$ nur entgegengesetzte Vorzeichen als für $\alpha = \alpha_1$, ohne im übrigen ihren Wert zu ändern. Daher hat ϑ in beiden Fällen denselben Wert, und es genügt, wenn wir uns auf die Betrachtung des Winkels α_1, welcher der Bedingung:

$$0^0 < \alpha < 90^0$$

unterworfen ist, beschränken.

Die Grenzen für ψ sind:

$$0^0 \leqq \psi \leqq 180^0.$$

Soll ϑ reell sein, so muss bei gegebenem α der Winkel ψ einen solchen Wert haben, dass die rechte Seite der Bedingungsgleichung positiv und nicht grösser als 1 wird, es muss also:

$$0 \leqq \operatorname{tg}(\alpha + \psi) \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \psi) < 1$$

sein.

Die Untersuchung ist einfach. Ihr Resultat ordnen wir in einer Tabelle an.

$>c : 0^0 < \alpha < 45^0$
$tg^2\alpha < 1,\ cot^2\alpha < 1)$

$\psi = 0^0$	: $cos^2\vartheta = tg^2\alpha\,[<1]$	ϑ *reell*
$0^0 < \psi < \alpha$	: $tg^2\alpha > cos^2\vartheta > 0$	
$\psi = \alpha$	: $cos^2\vartheta = 0$	
$\alpha < \psi < 45^0$	: $0 > \cos^2\vartheta > -1$	ϑ imaginär
$\psi = 45^0$	: $\cos^2\vartheta = -1$	
$45^0 < \psi\,(90^0 - \alpha)$	: $-1 > \cos^2\vartheta > -\infty$	
$\psi\,(= 90^0 - \alpha)$	: $\cos^2\vartheta = \mp\infty$	
$(90^0 - \alpha) < \psi < 90^0$	: $+\infty > \cos^2\vartheta > \cot^2\alpha$	
$\psi = 90^0$	: $\cos^2\vartheta = \cot^2\alpha\,[>1]$	
$90^0 < \psi < (90^0 + \alpha)$	: $\cot^2\alpha < \cos^2\vartheta < +\infty$	
$\psi = (90^0 + \alpha)$	: $\cos^2\vartheta = \pm\infty$	
$(90^0 + \alpha) < \psi < 135^0$	: $-\infty < \cos^2\vartheta < -1$	
$\psi = 135^0$	: $\cos^2\vartheta = -1$	
$135^0 < \psi < (180^0 - \alpha)$	: $-1 < \cos^2\vartheta < 0$	
$\psi = 180^0 - \alpha$	: $cos^2\vartheta = 0$	ϑ *reell*
$(180^0 - \alpha) < \psi < 180^0$	: $0 < cos^2\vartheta < tg^2\alpha$	
$\psi = 180^0$	: $cos^2\vartheta = tg^2\alpha\,[<1]$	

$>b : 45^0 < \alpha < 90^0$
$\alpha^2 > 1,\ cot^2\alpha < 1)$

$\psi = 0^0$	: $\cos^2\vartheta = \mathrm{tg}^2\alpha\,[>1]$	ϑ imaginär
$0 < \psi < (90^0 - \alpha)$	: $\mathrm{tg}^2\alpha < \cos^2\vartheta < +\infty$	
$\psi = (90^0 - \alpha)$	: $\cos^2\vartheta = \pm\infty$	
$(90^0 - \alpha) < \psi < 45^0$	: $-\infty < \cos^2\vartheta < -1$	
$\psi = 45^0$	: $\cos^2\vartheta = -1$	
$45^0 < \psi < \alpha$	: $-1 < \cos^2\vartheta < 0$	
$\psi = \alpha$	: $cos^2\vartheta = 0$	ϑ *reell*
$\alpha < \psi < 90^0$	: $0 < cos^2\vartheta < cot^2\alpha$	
$\psi = 90^0$	: $cos^2\vartheta = cot^2\alpha\,[<1]$	
$90^0 < \psi\,(< 180^0 - \alpha)$	: $cot^2\alpha > cos^2\vartheta > 0$	
$\psi = (180^0 - \alpha)$	: $cos^2\vartheta = 0$	
$(180^0 - \alpha) < \psi < 135^0$	: $0 > \cos^2\vartheta > -1$	ϑ imaginär
$\psi = 135^0$	: $\cos^2\vartheta = -1$	
$135^0 < \psi < (90^0 + \alpha)$	: $-1 > \cos^2\vartheta > -\infty$	
$\psi = (90^0 + \alpha)$	: $\cos^2\vartheta = \mp\infty$	
$(90^0 + \alpha) < \psi < 180^0$	: $+\infty > \cos^2\vartheta > \mathrm{tg}^2\alpha$	
$\psi = 180^0$	: $\cos^2\vartheta = \mathrm{tg}^2\alpha\,[>1]$	

Die dritte Möglichkeit: b ∦ c ist von diesen Betrachtungen auszuschliessen, da unter dieser Voraussetzung Gleichung 4) ein unendlich fernes Punktepaar darstellt, 31) also hinfällig wird.

Wir behandeln diesen Fall, der die gleichseitigen Zylinder und Paraboloide charakterisiert, gesondert im letzten Paragraphen.

Ist b ∦ c, so muss nach den Tabellen, falls ϑ reell sein soll, s in denjenigen Winkelraum (s_1, s_2) fallen, welcher die grössere Achse, bzw. den grösseren Parameter der gegebenen Flächen enthält, oder in s_1 oder s_2 selbst. Sind diese Bedingungen erfüllt, so gehen durch s zwei Tangentialebenen des Kegels 31), deren Neigungswinkel gegen die yz-Ebene aus:

$$\cos^2 \vartheta = \operatorname{tg}(\alpha + \psi) \operatorname{tg}(\alpha - \psi)$$

zu berechnen sind, und die die Flächen 2) und 2″) in reellen gleichseitigen Hyperbeln schneiden. Anderseits sind hiermit sämtliche denkbaren Durchschnittslinien s von Tangentialebenen des Kegels 31) mit der yz-Ebene erschöpft, da keine Tangentialebene die Koordinatenebene in demjenigen Winkelraum (s_1, s_2) schneiden kann, der die kleinere Achse, bzw. den kleineren Parameter der gegebenen Flächen enthält, weil dieser nach S. 164 ins Innere des Kegels 31) fällt.

Mithin wird der Kegel 31) von den Ebenen der gleichseitig-hyperbol. Schnitte vollständig umhüllt, und alle Tangentialebenen des Kegels schneiden die Flächen 2), 2′) und 2′) in gleichseitigen Hyperbeln, bzw. Paaren aufeinander senkrecht stehender Geraden. Auf die Ausnahmestellung der Ebenen 2″) selbst haben wir bereits hingewiesen.

Die Zusammenfassung dieser Resultate führt zu den Sätzen:

1. *Die Ebenen, welche einen hyperbolischen Zylinder in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, sind den Tangentialebenen eines mit dem Zylinder koaxialen parabo-*

lischen Kegels parallel, dessen Hauptachse in die kleinere Achse der Grundhyperbel des gegebenen Zylinders fällt, und dessen Fokalgeraden auf den Asymptotenebenen des Zylinders senkrecht stehen.

Die zur Zylinderachse senkrechten Ebenen schneiden den Kegel und den Zylinder in ähnlichen und ähnlich gelegenen Hyperbeln und die Asymptotenebenen des Zylinders, welche zugleich Tangentialebenen des Kegels sind, in den Asymptoten der Schnitthyperbeln.

2. *Die Ebenen, welche ein hyperbolisches Paraboloid in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, sind den Tangentialebenen eines mit dem Paraboloid koaxialen parabolischen Kegels parallel, dessen Hauptachse in diejenige Paraboloidachse fällt, welche den kleineren Parameter enthält, und dessen Fokalgeraden in der Scheitelebene auf den Scheitelstrahlen des Paraboloides senkrecht stehen.*

Die zur Paraboloidachse senkrechten Ebenen schneiden den Kegel und das Paraboloid in ähnlichen und ähnlich gelegenen Hyperbeln und die Richtebenen des Paraboloides, welche zugleich Tangentialebenen des Kegels sind, in den Asymptoten der Schnitthyperbeln.

3. *Die Ebenen, welche zwei gegebene Ebenen in Geraden schneiden, die aufeinander senkrecht stehen, sind den Tangentialebenen eines parabolischen Kegels parallel, dessen Hauptebenen die Winkelhalbierenden und die Ebene des Neigungswinkels der gegebenen Ebenen sind, und dessen Fokalgeraden auf den gegebenen Ebenen senkrecht stehen.*

Der Kegel berührt die gegebenen Ebenen, und seine Hauptachse steht einerseits auf der Winkelhalbierenden des Neigungswinkels, anderseits auf der Schnittachse der gegebenen Ebenen senkrecht.

Die zur letzteren senkrechten Ebenen schneiden den Kegel in ähnlichen und ähnlich gelegenen Hyperbeln und die Ebenen in den Asymptoten dieser Hyperbeln [1]).

[1]) Vergl. Schlömilch, S. 62; Rupp, S. 37. Rupp gegenüber sei noch einmal betont, dass die Kegelachse in allen drei Fällen auf der Hauptachse der gegebenen Flächen senkrecht steht. Schlömilch nennt einen Kegel 2. Grades allgemein „elliptisch".

VII. Kapitel.

§ 17.

Die gleichseitigen Hyperboloide und der gleichseitige Kegel 2. Grades.

Als *„gleichseitig“* bezeichnet man alle diejenigen Flächen 2. Grades:

$$35)\quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

welche der Bedingung:

$$36)\qquad a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

genügen, vergl. S. 54, 55.

Transformiert man die Gleichung 35) der gegebenen Fläche durch die allgemeinsten linearen Substitutionen:

$$37)\quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y = y_0 + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z = z_0 + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{cases}$$

unter den gleichzeitigen Voraussetzungen:

$$38)\quad \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1,\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \\ \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0,\ \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0 \end{cases}$$

auf irgend ein anderes rechtwinkliges Koordinatensystem, so haben in der neuen Gleichung der Fläche:

$$39)\quad a_{11}'x'^2 + a_{22}'y'^2 + a_{33}'z'^2 + 2a_{23}'y'z' + 2a_{31}'z'x' + 2a_{12}'x'y' + 2a_{14}'x' + 2a_{24}'y' + 2a_{34}'z' + a_{44} = 0$$

die Koeffizienten a_{11}', a_{22}', a_{33}' der rein quadratischen Glieder die Werte:

$$40)\quad \begin{cases} a_{11}' = a_{11}\alpha_1^2 + a_{22}\beta_1^2 + a_{33}\gamma_1^2 + 2a_{23}\beta_1\gamma_1 + 2a_{31}\gamma_1\alpha_1 \\ \qquad\qquad + 2a_{12}\alpha_1\beta_1 \\ a_{22}' = a_{11}\alpha_2^2 + a_{22}\beta_2^2 + a_{33}\gamma_2^2 + 2a_{23}\beta_2\gamma_2 + 2a_{31}\gamma_2\alpha_2 \\ \qquad\qquad + 2a_{12}\alpha_2\beta_2 \\ a_{33}' = a_{11}\alpha_3^2 + a_{22}\beta_3^2 + a_{33}\gamma_3^2 + 2a_{23}\beta_3\gamma_3 + 2a_{31}\gamma_3\alpha_3 \\ \qquad\qquad + 2a_{12}\alpha_3\beta_3\,; \end{cases}$$

ihre Summe ist daher mit Rücksicht auf 38) und 36):

$$41)\quad \underline{a_{11}' + a_{22}' + a_{33}' = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0}$$

Da die Substitutionen 37) alle möglichen Transformationen, also auch die auf die Mittelpunkt- und Hauptachsengleichungen, als Spezialfälle enthalten, *so ist für die gleichseitigen Flächen in jeder ihrer Gleichungsformen die Summe der Koeffizienten der rein quadratischen Glieder gleich Null.* Wir haben damit eine Definition der gleichseitigen Flächen gewonnen, welche ihre Analogie zu der gleichseitigen Hyperbel, der sie den Namen verdanken, besonders deutlich erkennen lässt.

Hiernach sind die beiden Hyperboloide:

$$1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \varepsilon = 0;\ \varepsilon = \mp 1$$

und ihr gemeinsamer Asymptotenkegel:

$$1')\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

gleichseitige Flächen, wenn sie der Bedingung:

$$42)\qquad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0$$

oder

$$42')\qquad a^2b^2 = c^2(a^2 + b^2)$$

genügen [1]).

Mit Rücksicht auf 42') gehen die Gleichungen 1) und 1') über in:

$$43)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}} + \varepsilon = 0$$

[1]) Vgl. S. 124, 55, 27, 25, 17.

oder: $\underline{b^2x^2 + a^2y^2 - (a^2 + b^2)\,z^2 + a^2b^2 \cdot \varepsilon = 0}$

und:

$$43') \qquad \frac{x^2}{a^2(a^2+b^2)} + \frac{y^2}{b^2(a^2+b^2)} - \frac{z^2}{a^2b^2} = 0$$

oder: $$b^2x^2 + a^2y^2 - (a^2 + b^2)\,z^2 = 0.$$

Gleichung 43') geht für $\varepsilon = 0$ aus 43) hervor, d. h. *der Asymptotenkegel eines gleichseitigen einschaligen oder zweischaligen Hyperboloides ist ein gleichseitiger Kegel.*

Solcher gleichseitigen Hyperboloide und Kegel gibt es unendlich viele, da in 43) eine von den Grössen a und b willkürlich gewählt werden kann.

Da jedoch:

$$a^2 > \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} < b^2$$

ist, so gelten die Sätze:

In jedem gleichseitigen Hyperboloid ist die hyperbolische Achse die kleinste.

In jedem gleichseitigen Kegel ist die reelle Achse die kleinste.

Die gleichseitigen Hyperboloide und Kegel genügen also, in der Form 1) geschrieben, der Bedingung:

$$a > b = c,$$

wenn wir wieder den Fall $a < b$, da er nichts Neues bietet, ausser acht lassen.

Demnach gelten für die gleichseitig-hyperbol. Schnitte der gleichseitigen Hyperboloide und Kegel die Sätze 5 und 6 der Seite 148, welche diejenigen Flächen betreffen, deren Asymptotenkegel in allen Achsenschnitten Kegelöffnungen von mehr als 90^0 hat.

Im folgenden wollen wir unabhängig von § 12 untersuchen, in welcher Weise diese Sätze für die gleichseitigen Flächen spezialisiert werden.

Zunächst wollen wir die Bedingungen 42) bezw. 36) für die in der allgemeinen Gleichungsform gegebenen

Hyperboloide geometrisch diskutieren, u. zwar in Anlehnung an Plücker (vergl. S. 44, 45).

Schreibt man die Gleichung der zu untersuchenden Hyperboloide 43) in der Form:

$$43'') \qquad \pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \mp \frac{z^2}{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}} - 1 = 0,$$

so wird dieselbe durch eine konzentrische Drehung des Koordinatensystems:

$$44) \quad \begin{cases} x = \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta \\ y = \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta \\ z = \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta \end{cases}$$

in die Form:

$$45) \quad A\xi^2 + A'\eta^2 + A''\zeta^2 + 2B\eta\zeta + 2B'\zeta\xi + 2B''\xi\eta = 1$$

übergeführt, in welcher wegen 41):

$$46) \qquad A + A' + A'' = 0$$

ist.

Dabei sind die Koeffizienten A, A' und A'' einzeln die reziproken Werte der Quadrate der in die betreffende Koordinatenachse fallenden Halbmesser der Flächen 45); denn z. B. für $\eta = 0$, $\zeta = 0$ folgt aus 45):

$$\xi^2 = \frac{1}{A}$$

oder

$$A = \frac{1}{\xi^2}.$$

Daher wird $A = 0$, wenn man die Lage des neuen Koordinatensystems so bestimmt, dass seine ξ-Achse in eine Erzeugende des Asymptotenkegels der Flächen 45) fällt.

Gleichung 45) reduziert sich unter dieser Voraussetzung auf:

$$45') \qquad A'\eta^2 + A''\zeta^2 + 2B\eta\zeta + 2B'\xi\zeta + 2B''\xi\eta = 1$$

und die Bedingung der Gleichseitigkeit 46) auf:

46′) $$A' + A'' = 0.$$

Für $\xi =$ const. stellt 45′) die Schnittkurven der gegebenen gleichseitigen Hyperboloide mit einer Ebene dar, welche auf einer Erzeugenden ihres Asymptotenkegels in irgend einem Punkte senkrecht steht.

Wegen 46′) sind alle diese Schnittkurven gleichseitige Hyperbeln. Das Gleiche gilt von den Schnitten der Ebene $\xi =$ const. mit dem Asymptotenkegel der Flächen 45′). Ist im besondern $\xi = 0$, so wird der Asymptotenkegel in zwei Kegelstrahlen:

45″) $$A'\eta^2 + A''\zeta^2 + 2B\eta\zeta = 0$$

geschnitten, die wegen 46′) aufeinander senkrecht stehen.

Der gleichseitige Kegel enthält also zu jeder Erzeugenden zwei weitere, welche auf der gegebenen und aufeinander senkrecht stehen.

Ein anderer Beweis hierfür ist der:

Da nach dem Vorhergehenden der gleichseitige Kegel in allen Achsenschnitten Öffnungsweiten von mehr als 90^0 hat, so gibt es zu jeder Erzeugenden desselben mindestens eine andere, welche auf ihr senkrecht steht. Wählt man beide als Koordinatenachsen, etwa als ξ- und η-Achse, so wird $A = 0$ und $A' = 0$, also wegen 46) auch $A'' = 0$, d. h. auch die dritte Achse gehört dem Asymptotenkegel der Flächen 45) an. Derselbe enthält also unendlich viele Tripel zu einander normaler Kegelstrahlen.

Wir wollen diese Sätze umkehren:

Ist irgend ein gleichseitig-hyperbol. Schnitt der gleichseitigen Hyperboloide 43″) oder ihres Asymptotenkegels gegeben, so kann man das Koordinatensystem so drehen, dass die $\eta\zeta$-Ebene der Schnittebene parallel wird. Die Gleichung der Schnittkurve nimmt dann die Form 45) mit $\xi =$ const. an und genügt, da die Kurve eine gleichseitige Hyperbel sein soll, der Bedingung:

$$A' + A'' = 0.$$

Da die gegebene Fläche gleichseitig ist, so ist die Gleichung 46) erfüllt. Also ist:

$$A = 0,$$

d. h. die ξ-Achse des neuen Systems, welche auf der Ebene des gleichseitig-hyperbol. Schnittes senkrecht steht, ist eine Erzeugende des Asymptotenkegels der Flächen 43").

Mithin steht jeder gleichseitig-hyperbol. Schnitt dieser Flächen auf einer Erzeugenden ihres Asymptotenkegels senkrecht. Die dem gleichseitigen Hyperbelschnitt parallele Koordinatenebene $\xi = 0$ schneidet den Asymptotenkegel in zwei zu einander normalen Kegelstrahlen, welche den Asymptoten der Schnitthyperbeln aller parallelen Ebenen parallel sind.

Bisher sind wir immer von der Voraussetzung ausgegangen, dass die gegebenen Flächen gleichseitig seien. Wir legen uns jetzt die umgekehrte Frage vor,

ob ein Hyperboloid, welches von einer auf einer Erzeugenden seines Asymptotenkegels senkrechten Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten wird, notwendig ein gleichseitiges Hyperboloid ist,

oder:

ob ein Kegel, welcher drei aufeinander senkrecht stehende Erzeugenden enthält, notwendig ein gleichseitiger Kegel ist.

Beide Fragen sind zu bejahen.

Denn wählt man im ersteren Falle die auf dem gleichseitigen Hyperbelschnitt senkrecht stehende Erzeugende des Asymptotenkegels, im letzteren Falle eine der drei zueinander normalen Erzeugenden des Kegels zur ζ-Achse, so ist in der allgemeinen Mittelpunktsgleichung 45) der gegebenen Flächen $A = 0$ zu setzen, dieselbe nimmt also die Form 45') an. Diese Gleichung ist aber zugleich für ξ const. die Gleichung des gegebenen gleichseitig-hyperbol.

Schnittes des gegebenen Hyperboloides und, wenn auf der rechten Seite Null steht, für ξ 0 die Gleichung der beiden auf der gegebenen senkrecht stehenden Erzeugenden des Kegels. In beiden Fällen muss daher $A' + A''$ 0 sein. Die gegebenen Flächen genügen demnach für *eine* Lage des Koordinatensystems der Bedingung 46), also, wie zu Anfang des Paragraphen bewiesen wurde, für *jedes* Koordinatensystem. Mithin sind sie gleichseitige Flächen.

Hiermit sind folgende Sätze bewiesen, welche auch der Definition der gleichseitigen Hyperboloide und Kegel zugrunde gelegt werden können:

1. *Enthält ein Kegel drei zu einander rechtwinklige Erzeugende, so enthält er unendlich viele solcher Tripel; nämlich für jede Erzeugende gibt es zwei zu ihr und untereinander normale* [1]).

Der Kegel ist ein gleichseitiger Kegel. Umgekehrt genügt jeder gleichseitige Kegel der angegebenen Bedingung.

Oder:

„In einen Kegel, in welchen sich eine rechtwinklige körperliche Ecke beschreiben lässt, lassen sich solcher Ecken unendlich viele beschreiben, und durch die sechs Kanten zweier solcher Ecken mit gemeinschaftlichem Scheitel lässt sich immer eine Kegelfläche der zweiten Ordnung legen [2]).

[1]) Vgl. Vogt, S. 16; Schröter, S. 25.

[2]) Vergl. Plücker, S. 45. Hierhin gehören auch folgende Sätze: Magnus, Aufgaben 2 (1837), S. 323: „Eine Kegelfläche 2. Grades, welche 5 von den 6 Kanten zweier rechtwinkligen Ecken enthält, enthält auch die 6. Kante.“ Schröter, a. a. O.: „Zwei Tripel von je drei zu einander rechtwinkligen Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, sind allemal sechs Strahlen eines gleichseitigen Kegels.“ Schröter führt noch eine Reihe anderer bemerkenswerter Eigenschaften des gleichseitigen Kegels an, auf die wir jedoch nicht eingehen, da sie in keiner unmittelbaren Beziehung zu den gleichseitig-hyperbol. Schnitten des Kegels stehen.

Auf das einschalige Hyperboloid übertragen heisst das:

2. *Enthält ein einschaliges oder windschiefes Hyperboloid drei derselben Regelschar angehörige Erzeugende, welche aufeinander senkrecht stehen, so enthält es unendlich viele solcher Tripel; nämlich für jede Erzeugende gibt es zwei zu ihr und untereinander normale*[1]).

Ein solches Hyperboloid ist gleichseitig. Umgekehrt genügt jedes gleichseitige einschalige Hyperboloid der angegebenen Bedingung.

Ferner:

3. *Wird ein Kegel von einer Ebene, welche auf einer seiner Erzeugenden senkrecht steht, in einer gleichseitigen Hyperbel* geschnitten, so schneidet jede zu einer Erzeugenden des Kegels normale Ebene denselben in einer gleichseitigen Hyperbel*.*

Der Kegel ist dann ein gleichseitiger Kegel.

4. *Ein gleichseitiger Kegel wird von jeder Ebene, welche auf einer seiner Erzeugenden senkrecht steht, in einer gleichseitigen Hyperbel* geschnitten.*

Umgekehrt steht jeder gleichseitig-hyperbolische Schnitt eines gleichseitigen Kegels auf einer seiner Erzeugenden senkrecht.

Und:

5. *Wird ein einschaliges Hyperboloid von einer Ebene, welche auf einer seiner Erzeugenden senkrecht steht, in einer gleichseitigen Hyperbel* geschnitten, so schneidet jede zu einer Erzeugenden normale Ebene das Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel*.*

Das Hyperboloid ist dann ein gleichseitiges.

6. *Ein gleichseitiges einschaliges Hyperboloid wird von jeder Ebene, welche auf einer seiner Erzeugenden*

[1]) Vergl. Vogt, S. 16; Schröter, S. 26. Ferner sei an die Zusammenfassung der von Vogt gefundenen Resultate auf S. 18 erinnert.

senkrecht steht, in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten.*

Umgekehrt steht jeder gleichseitig-hyperbolische, bezw. rechtwinklige Schnitt eines gleichseitigen einschaligen Hyperboloides auf einer Erzeugenden desselben senkrecht.

7. *Wird ein zweischaliges Hyperboloid von einer Ebene, welche auf einer Erzeugenden seines Asymptotenkegels senkrecht steht, in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten, so schneidet jede zu einer Erzeugenden des Asymptotenkegels normale Ebene das Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel.*

Das Hyperboloid ist dann ein gleichseitiges.

8. *Ein gleichseitiges zweischaliges Hyperboloid wird von jeder Ebene, welche auf einer Erzeugenden seines Asymptotenkegels senkrecht steht, in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten.*

Umgekehrt steht jeder gleichseitig-hyperbolische Schnitt eines gleichseitigen zweischaligen Hyperboloides auf einer Erzeugenden seines Asymptotenkegels senkrecht.

Da alle diejenigen Ebenen, welche auf den Erzeugenden eines Kegels in der Kegelspitze senkrecht stehen, den Polarkegel des gegebenen umhüllen, so gehen aus diesen Sätzen unmittelbar die folgenden hervor:

9. *Die Ebenen, welche einen gleichseitigen Kegel in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, sind den Tangentialebenen seines Polarkegels parallel.*

Umgekehrt schneidet jede Ebene, welche einer Tangentialebene des Polarkegels parallel ist, den gegebenen gleichseitigen Kegel in einer gleichseitigen Hyperbel.

Ein Spezialfall dieses Satzes ist der:

10. *Die Ebenen, welche einen gleichseitigen Kegel in Paaren aufeinander senkrecht stehender Erzeugenden schneiden, umhüllen den Polarkegel des gegebenen.*

Umgekehrt schneidet jede Tangentialebene des Polarkegels den gegebenen gleichseitigen Kegel in einem Paare aufeinander senkrecht stehender Erzeugenden.

Ferner:

11. *Die Ebenen, welche ein gleichseitiges Hyperboloid in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, sind den Tangentialebenen eines Kegels parallel, der der Polarkegel des Asymptotenkegels des gegebenen Hyperboloides ist.*

Umgekehrt schneidet jede Ebene, welche einer Tangentialebene des genannten Kegels parallel ist, das gleichseitige Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel.*

Vergl. hierzu S. 20, ferner Rupp, S. 31.

Die letzten Sätze gehen auch aus den Entwickelungen des § 14 hervor, wie im folgenden gezeigt werden soll, da dieselben gleichzeitig zu einigen neuen Ergebnissen führen.

Die Flächen 1) und 1') sind gleichseitig unter der Bedingung 42); in diesem Falle ist (vergl. S. 173):

$$a \geq b > c.$$

Daher umhüllen nach S. 147 die durch O gehenden hyperzyklischen Ebenen der Flächen 1) den mit den gegebenen Flächen konzentrischen und koaxialen Kegel:

$$8) \qquad \frac{x^2}{a^2(b^2-c^2)} + \frac{y^2}{b^2(a^2-c^2)} - \frac{z^2}{c^2(a^2+b^2)} = 0,$$

von dem wir bereits wissen, dass seine Fokalgeraden auf den Kreisebenen der gegebenen Flächen senkrecht stehen (vergl. S. 142).

Durch Einsetzen des Wertes für c^2, welcher sich aus 42) ergibt, gehen die Gleichungen 1) und 8) über in:

$$43) \qquad b^2 . x^2 + a^2 . y^2 - (a^2 + b^2) . z^2 + a^2 b^2 . \varepsilon = 0$$

und:

$$47) \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2 + b^2} = 0,$$

woraus unmittelbar hervorgeht, dass im Falle der gleichseitigen Hyperboloide 43) der Ortskegel ihrer durch den Mittelpunkt gehenden hyperzyklischen Ebenen 47) der Polarkegel (= Reziprokalkegel) des Asymptotenkegels 43′) der gegebenen Flächen ist; denn die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Kegel Polarkegel von einander sind, ist die, dass in ihren Hauptachsengleichungen die Koeffizienten gleicher Unbekannten reziproke Werte haben.

Alle übrigen hyperzyklischen Ebenen der Flächen 43) sind nach § 14 den Tangentialebenen des Kegels 47) parallel, und umgekehrt schneiden alle Ebenen, welche irgend einer Tangentialebene dieses Kegels parallel sind, die Flächen 43) in gleichseitigen Hyperbeln.

Da 47) der Polarkegel von 43′) ist, seine Tangentialebenen also auf den Erzeugenden von 43′) senkrecht stehen, so steht jeder gleichseitig-hyperbol. Schnitt der Flächen 43) auf einer Erzeugenden ihres Asymptotenkegels senkrecht.

Wir gelangen also auch von hier aus zu den Sätzen 4, 6, 8, 9, 10, 11.

Wegen der Wechselseitigkeit der Beziehungen der beiden Polarkegel 43′) und 47) stehen nicht allein die Fokallinien des Kegels 47) auf den Kreisschnitten des Kegels 43′) senkrecht, sondern auch umgekehrt die Fokallinien des Kegels 43′) auf den Kreisschnitten des Kegels 47), vergl. den zweiten auf S. 141 angeführten Satz aus Salmon-Fiedler. Mit Hülfe der Formeln 9) und 10) des § 14 liesse sich dies auch leicht direkt beweisen.

Der Kegel 47) hat noch eine zweite bemerkenswerte Eigenschaft, welche für den Polarkegel eines *gleichseitigen* Kegels charakteristisch ist. Da nämlich der gleichseitige Kegel unendlich viele Tripel aufeinander senkrecht stehender Kegelstrahlen enthält, und

da auf jedem Kegelstrahl eine Tangentialebene des Polarkegels senkrecht steht, so enthält dieser unendlich viele Tripel aufeinander senkrecht stehender Tangentialebenen; nämlich für jede Tangentialebene des Kegels gibt es zwei auf ihr und aufeinander senkrecht stehende. Mit andern Worten: Dem Polarkegel eines gleichseitigen Kegels lassen sich unendlich viele rechtwinklige körperliche Ecken umschreiben. Aus den Sätzen 1 über den gleichseitigen Kegel gehen daher durch Vertauschung der Worte „Erzeugende" und „Tangentialebene" entsprechende Sätze über seinen Polarkegel hervor. Dieser ist dadurch gekennzeichnet, dass die *Summe seiner Halbachsenquadrate gleich Null* ist[1]).

Wir können daher den Sätzen 9, 10 und 11 zusammenfassend folgende Fassung geben:

12. *Die Ebenen, welche ein gleichseitiges Hyperboloid und seinen Asymptotenkegel in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, sind den Tangentialebenen eines Kegels parallel, dessen Fokalgeraden auf den Kreisschnitten und dessen Kreisschnitte auf den Fokalgeraden des Asymptotenkegels senkrecht stehen," und dem sich unendlich viele rechtwinklige körperliche Ecken umschreiben lassen. Die Summe der Halbachsenquadrate dieses Kegels ist gleich Null. Es ist der Polarkegel des gleichseitigen Asymptotenkegels des gegebenen Hyperboloides.*

Die Bedingungsgleichung für die Koeffizienten α, β, γ, δ der hyperzyklischen Ebenen nimmt für die gleichseitigen Flächen 43) die Form an:

48) $$\underline{b^2 \cdot \alpha^2 + a^2 \cdot \beta^2 - (a^2 + b^2) \cdot \gamma^2 = 0.}$$

Sie stellt einen unendlich fernen Kegelschnitt dar, welcher dem Asymptotenkegel 43') polarreziprok ist, vergl. S. 125ff, wo dieser Satz bereits allgemeiner begründet ist; d. h.:

[1]) Vergl. u. a. Magnus, Aufgaben 2 (1837), S. 323, 324. Plücker, System (1846), S. 155, 156. Schröter, Oberfl. 2. O.

13. *Die Ebenen, welche ein gleichseitiges Hyperboloid und seinen Asymptotenkegel in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, umhüllen einen unendlich fernen Kegelschnitt, welcher dem gegebenen Asymptotenkegel polarreziprok ist.*

§ 18.

Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid, der gleichseitige hyperbolische Zylinder und das Paar aufeinander senkrecht stehender Ebenen.

Auf die Flächen:

3) $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \varepsilon = 0;\ \varepsilon = -1, 0, +1$$

und:

3′) $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \pm 2x = 0$$

angewendet, nimmt die Bedingung 36) der Gleichseitigkeit die Form an:

49) $$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0$$

oder:

49′) $$b = c\ ^1).$$

Wir erhalten daher:

50) $$y^2 - z^2 + b^2 \cdot \varepsilon = 0, \varepsilon = \mp 1$$

als Gleichung der gleichseitigen hyperbol. Zylinder,

50′) $$y^2 - z^2 \pm 2b^2x = 0$$

als Gleichung der gleichseitigen hyperbol. Paraboloide und:

50″) $$y^2 - z^2 = 0$$

als Gleichung zweier aufeinander senkrecht stehender Ebenen, welche gleichzeitig die Asymptotenebenen der gleichseitigen Zylinder 50) und die Richtebenen der gleichseitigen Hyperboloide 50′) sind, und welche als zerfallende gleichseitige Fläche 2. Grades anzusehen sind.

---

[1]) Vergl. S. 48.

Wie wir bereits hervorgehoben, gibt es, von der verschiedenen Lage gegen das Koordinatensystem abgesehen, nur *einen* gleichseitigen Zylinder und *ein* gleichseitiges Paraboloid.

Auf ähnliche Weise, wie wir auf S. 173—177 die Sätze über die gleichseitigen Hyperboloide und ihrem Asymptotenkegel aus der Definition abgeleitet haben, haben wir die Mehrzahl der Sätze über die gleichseitigen Paraboloide und Zylinder und über das Paar aufeinander senkrecht stehender Ebenen schon auf den Seiten 47—54 im Anschluss an Plückers Notiz über die gleichseitigen Mittelpunktsflächen 2. O. gewonnen. Ergänzt werden jene Untersuchungen durch den Zusatz zu Vogts Angaben über die gleichseitig-hyperbol. Schnitte des gleichseitigen hyperbol. Paraboloides auf S. 21 und 22.

Um nicht alles dort Gesagte wiederholen zu müssen, begnügen wir uns damit, die Sätze selbst noch einmal anzuführen. Wir vermehren sie gleich durch einige Umkehrungen, die ähnlich wie auf S. 175—177 ebenso leicht bewiesen werden.

1. *Zwei sich schneidende Ebenen, die ein Tripel zu einander normaler Geraden enthalten, enthalten deren unendlich viele.*

   Die Ebenen stehen auf einander senkrecht. Umgekehrt enthält jedes Paar aufeinander senkrecht stehender Ebenen unendlich viele Tripel aufeinander senkrecht stehender Geraden; nämlich für jede in einer der beiden Ebenen gelegenen Geraden gibt es zwei weitere Geraden in dem Ebenenpaar, welche auf der gegebenen und aufeinander senkrecht stehen.

Daraus folgt:

2. *Alle Ebenen, welche zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen in Paaren aufeinander senkrecht stehender Geraden schneiden, stehen auf einer dritten*

Geraden senkrecht, welche einer der beiden gegebenen Ebenen angehört.

Oder:

Alle Ebenen, welche zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen in Paaren aufeinander senkrecht stehender Geraden schneiden, stehen auf einer der beiden gegebenen Ebenen senkrecht.

Und umgekehrt:

Alle Ebenen, welche auf einer von zwei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen senkrecht stehen, schneiden dieselben in zwei aufeinander senkrecht stehenden Geraden.

Oder noch anders ausgedrückt:

3. *Alle Ebenen, welche zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen in Paaren aufeinander senkrecht stehender Geraden schneiden, sind den Ebenen zweier Ebenenbüschel parallel, deren Achsen zwei in den gegebenen Ebenen auf einem beliebigen Punkte ihrer Schnittlinie senkrecht stehende Gerade sind und umgekehrt.*

Zwei aufeinander senkrecht sehende Ebenen können als Richtebenen eines gleichseitigen hyperbol. Paraboloides angesehen werden. Das Paraboloid und seine Richtebenen werden von jeder Ebene in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kurven geschnitten, da die Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ in § 10 nur die Koeffizienten der quadratischen Glieder in der Gleichung der gegebenen Oberfläche enthält und diese in den Gleichungen des Paraboloides und seiner Richtebenen gleich sind. Doch sind die Schnitte mit den Richtebenen zerfallende Kegelschnitte, nämlich Geradenpaare; u. zw. entsprechen den hyperbol. Schnitten ihre Asymptoten, den parabolischen — welche für die Flächen 50′) der x-Achse parallel liegen — Paare paralleler Geraden. Jedem rechtwinkligen Schnitt der Richtebenen entspricht daher ein gleichseitig-hyperbol. Schnitt des Paraboloides. Bedenkt

man ferner, dass die Erzeugenden jeder Regelschar des Paraboloides einer der beiden Richtebenen parallel sind, u. zw. so, dass es parallel zu jeder in einer der Richtebenen gelegenen Geraden eine Erzeugende des Paraboloides gibt, so können die folgenden Sätze, welche wir zum Teil schon direkt bewiesen haben, auch unmittelbar aus den vorhergehenden gefolgert werden:

4. *Ein Paraboloid, welches ein Tripel zu einander normaler Erzeugenden enthält, enthält deren unendlich viele.*

   Das Paraboloid ist ein gleichseitiges. Umgekehrt enthält jedes gleichseitige Paraboloid unendlich viele Tripel aufeinander senkrecht stehender Erzeugenden; nämlich für jede Erzeugende einer Regelschar gibt es zwei weitere auf der gegebenen und aufeinander senkrecht stehende Erzeugende des Paraboloides, von denen immer eine derselben Regelschar angehört wie die gegebene. Nur zu den Scheitelstrahlen gehören unendlich viele Paare auf ihnen und aufeinander senkrecht stehender Erzeugenden, die derjenigen Regelschar angehören, zu der der gegebene Scheitelstrahl nicht gehört.

5. *Alle Ebenen, welche ein gleichseitiges Paraboloid in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, stehen auf einer Erzeugenden des Paraboloides senkrecht.*

Oder:

Alle Ebenen, welche ein gleichseitiges Paraboloid in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, stehen auf einer seiner Richtebenen senkrecht.*

Und umgekehrt:

Alle Ebenen, welche auf einer Erzeugenden, bzw. einer Richtebene eines gleichseitigen Paraboloides senkrecht stehen, schneiden dasselbe in gleichseitigen Hyperbeln.*

Oder endlich:

6. *Alle Ebenen, welche ein gleichseitiges Paraboloid in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, sind den Ebenen der beiden durch die Scheitelstrahlen als Achsen bestimmten Ebenenbüschel parallel und umgekehrt:*

Jede Ebene, welche einem der beiden Scheitelstrahlen eines gleichseitigen Paraboloides parallel ist, schneidet das Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel

Betrachtet man endlich die beiden aufeinander senkrecht stehenden Ebenen, als Asymptotenebenen eines gleichseitigen hyperbol. Zylinders, so kann man die Sätze über die gleichseitig-hyperbol. Schnitte des letzteren ebenso wie die des gleichseitigen Paraboloides aus denen über die rechtwinkligen Schnitte des Ebenenpaares herleiten; denn jede Ebene, welche die Asymptotenebenen in einem rechten Winkel schneidet, schneidet den Zylinder in einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten die Schenkel jenes Winkels sind, was wiederum aus der Gleichheit der Koeffizienten in den Gleichungen des Zylinders und seiner Asymptotenebenen folgt. Wir gewinnen daher aus den Sätzen 2 und 3 die weiteren Sätze:

7. *Alle Ebenen, welche einen gleichseitigen Zylinder in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, stehen auf einer seiner Asymptotenebenen senkrecht.*

Und umgekehrt:

Alle Ebenen, welche auf einer Asymptotenebene eines gleichseitigen Zylinders senkrecht stehen, schneiden denselben in gleichseitigen Hyperbeln.

Oder:

8. *Alle Ebenen, welche einen gleichseitigen Zylinder in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, sind den Ebenen zweier Ebenenbüschel parallel, deren Achsen zwei in den Asymptotenebenen auf einem beliebigen Punkt*

ihrer Schnittlinie senkrecht stehende Gerade sind und umgekehrt.

Endlich sind noch folgende Umkehrungen der Sätze 2, 5, 6 und 7 möglich, welche den Sätzen 3, 5 und 7 des § 17 analog zu beweisen sind:

9. *Werden zwei Ebenen von einer dritten, welche auf einer von beiden senkrecht steht, in zwei aufeinander senkrecht stehenden Geraden geschnitten, so schneidet jede auf einer der beiden gegebenen Ebenen senkrecht stehende Ebene dieselben in zwei aufeinander senkrecht stehenden Geraden.*

   Die beiden gegebenen Ebenen stehen dann selbst aufeinander senkrecht.

10. *Wird ein hyperbolisches Paraboloid von einer Ebene, welche auf einer seiner Erzeugenden — oder, was dasselbe ist, auf einer seiner Richtebenen — senkrecht steht, in einer gleichseitigen Hyperbel* geschnitten, so schneidet jede zu einer Erzeugenden normale Ebene das Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel*.*

    Das Paraboloid ist dann ein gleichseitiges.

Oder:

11. *Wird ein hyperbolisches Paraboloid von einer Ebene, welche einem seiner Scheitelstrahlen parallel ist, in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten, so schneidet jede zu einem der Scheitelstrahlen parallele Ebene das Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel*.*

    Das Paraboloid ist dann ein gleichseitiges.

12. *Wird ein hyperbolischer Zylinder von einer Ebene, welche auf einer seiner Asymptotenebenen senkrecht steht, in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten, so schneidet jede auf einer der beiden Asymptotenebenen senkrecht stehende Ebene den Zylinder in einer gleichseitigen Hyperbel*.*

    Der Zylinder ist dann gleichseitig.

Wie schon mehrfach hervorgehoben, bilden die gegebenen Ebenen selbst, bezw. die Richtebenen des gleichseitigen Paraboloides und die Asymptotenebenen des gleichseitigen Zylinders Ausnahmen von diesen Sätzen. Die ihnen parallelen Ebenen schneiden jedesmal in einer endlichen und einer unendlich fernen Geraden, welche man mit Rücksicht auf § 13, V, S. 136 mit ebenso viel Recht als Ausartung von Parabeln ansehen kann, während die Auffassung als Kreisschnitte, wie sie sich bei Vogt findet, vergl. S. 18, weniger berechtigt erscheint, da nach § 13, V elliptische, also auch Kreisschnitte gar nicht vorhanden sein können.

Unsere Sätze lassen ferner erkennen, dass die gleichseitigen Paraboloide und Zylinder nicht allein zu den gleichseitigen Kegeln in Analogie stehen, sondern auch zu jenen, deren reelle Achse gleich der kleineren imaginären Achse ist, d. h. deren kleinste Öffnungsweite 90^0 beträgt.

Wir wollen zum Schluss noch einmal auf die in § 13, S. 137 gefundenen Resultate zurückgehen, und sie unter der speziellen Voraussetzung:

49′) $\qquad b = c$

betrachten.

Bei dieser Annahme wird der geometrische Ort der hyperzyklischen Ebenen 4) zu:

51) $\qquad \beta^2 - \gamma^2 = 0,$

ist also ein unendlich fernes Punktepaar, welches mit Bezug auf O als Zentrum der Reziprozität den Ebenen

50″) $\qquad y^2 - z^2 = 0$

polarreziprok ist (vergl. S. 130, 131), d. h.

13. Die Ebenen, welche zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen in Paaren aufeinander senkrecht

stehender Geraden schneiden, umhüllen ein unendlich fernes Punktepaar, welches den gegebenen Ebenen polarreziprok ist.

14. *Die Ebenen, welche ein gleichseitiges Paraboloid in gleichseitigen Hyperbeln* schneiden, umhüllen ein unendlich fernes Punktepaar, welches den Richtebenen des Paraboloides polarreziprok ist.*

15. *Die Ebenen, welche einen gleichseitigen Zylinder in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, umhüllen ein unendlich fernes Punktepaar, welches den Asymptotenebenen des Zylinders polarreziprok ist.*

Die durch O gehenden hyperzyklischen Ebenen bilden im Falle der gleichseitigen Flächen 50), 50′) und 50″) die beiden Ebenenbüschel:

51′) $$\beta^2 - \gamma^2 = 0,\ \delta = 0,$$

deren Achsen, wie wir auf S. 131 gesehen, die Scheitelstrahlen der Paraboloide 50) sind und deren Gleichungen in Punktkoordinaten

52) $$\begin{cases} y + z + \lambda x = 0 \\ y - z + \lambda x = 0 \end{cases}$$

lauten.

Ihre Achsen:

$$y^2 - z^2 = 0,\ x = 0$$

stehen, wie noch einmal erwähnt werden mag, auf den Ebenen 50″) senkrecht. Der parabolische Kegel 31) (vergl. S. 161) ist also gewissermassen in die beiden durch seine Fokalgeraden als Achsen bestimmten Ebenenbüschel ausgeartet.

Wir kommen also auch auf diesem Wege zu den Sätzen 2, 3, 5, 6, 7, 8 zurück.

Meinem hochverehrten Lehrer,

Herrn Professor Dr. Staude,

spreche ich auch an dieser Stelle für die freundliche Unterstützung, die er mir bei der Anfertigung dieser Arbeit erwies, meinen aufrichtigen Dank aus.